

CHAPITRE 12
LA TRANSLATION

| | |
|---|-----------|
| <u>REPÉRAGE SUR QUADRILLAGE</u> | <u>58</u> |
| <u>UTILISER LE QUADRILLAGE</u> | <u>60</u> |
| <u>TRANSLATION SUR QUADRILLAGE</u> | <u>62</u> |
| <u>POLYGONES INSCRITS.....</u> | <u>64</u> |
| <u>TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES LEÇON</u> | <u>66</u> |
| <u>EXERCICES.....</u> | <u>69</u> |

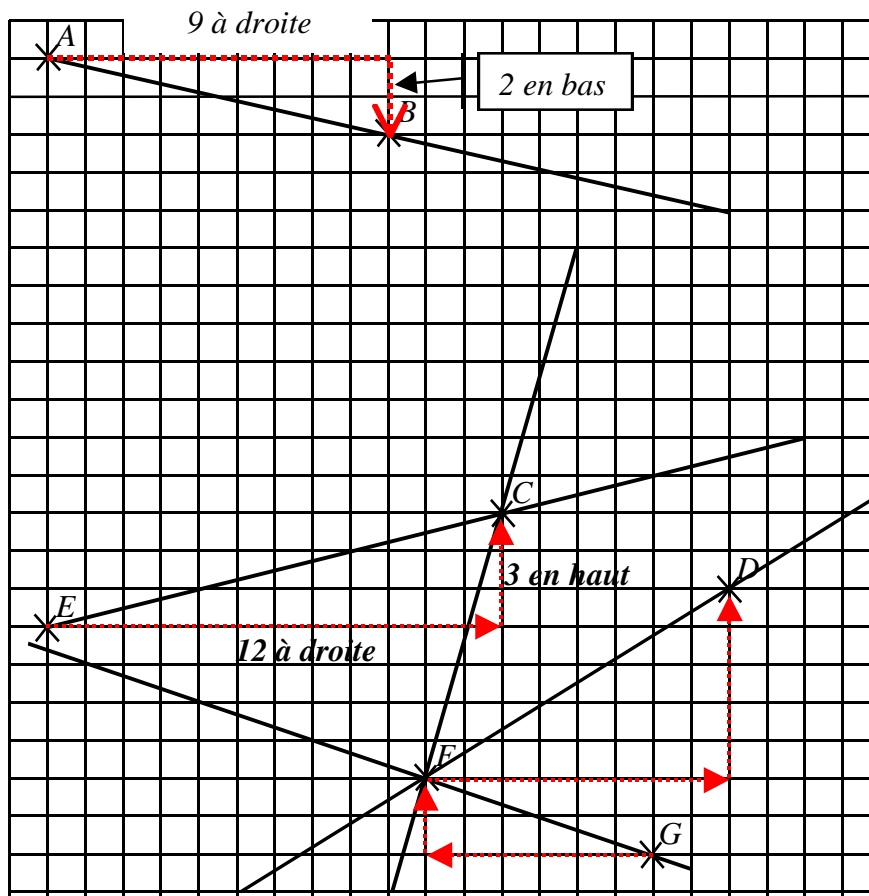
REPERAGE SUR QUADRILLAGE

Un quadrillage est constitué de lignes verticales et de lignes horizontales régulièrement espacées. A l'intersection de ces lignes se trouvent des **nœuds** du quadrillage. Tous les points que l'on va utiliser dans ce travail sur le quadrillage sont placés à des nœuds du quadrillage.

Direction d'une droite sur un quadrillage :

Pour déterminer la direction d'une droite sur un quadrillage :

- On utilise deux points de la droite situés sur des nœuds du quadrillage.
- On se déplace de l'un vers l'autre en suivant d'abord les lignes horizontales, puis les lignes verticales.
- On compte le nombre de carreaux du déplacement.
- Ce déplacement peut se faire dans deux sens :
 - Horizontalement : à droite ou à gauche
 - Verticalement : en haut ou en bas
- La direction est donnée par un couple de deux nombres et deux directions



On peut décrire les directions des droites par les codages suivants :

$$(AB) : (9d ; 2b)$$

$$(EC) : (12d ; 3h)$$

$$(FD) : (8d ; 5h)$$

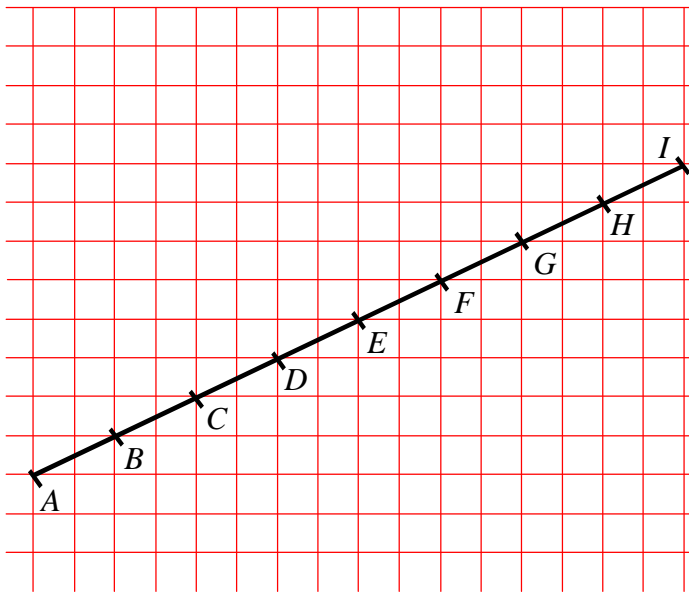
$$(FG) : (6g ; 2h)$$

$$(FC) : (2d ; 7h)$$

$$(DC) : (6g ; 2h)$$

$$(GC) : (4g ; 9h)$$

Pour une même droite, il existe une infinité de codages équivalents.



Sur cette droite, il y a un certain nombre de points qui peuvent être utilisés pour le repérage de la direction de la droite.

Si l'on va de A en B, ou de B en C, ou de C en D, etc. c'est à dire d'un point au point suivant, on obtient le

On pourrait aussi se déplacer dans l'autre sens, de I vers H, de H vers G, de G vers F, etc., on obtient alors le codage $(2g ; 1b)$.

Si l'on va de A en C, ou de B en D, ou de C en E, etc., on obtient le codage $(4d ; 2h)$.

Si l'on va de A en D, ou de B en E,

ou de C en F, etc., on obtient le codage $(6d ; 3h)$.

Si l'on va de I en E, ou de H en D, ou de G en C, etc., on obtient le codage $(8g ; 4b)$.

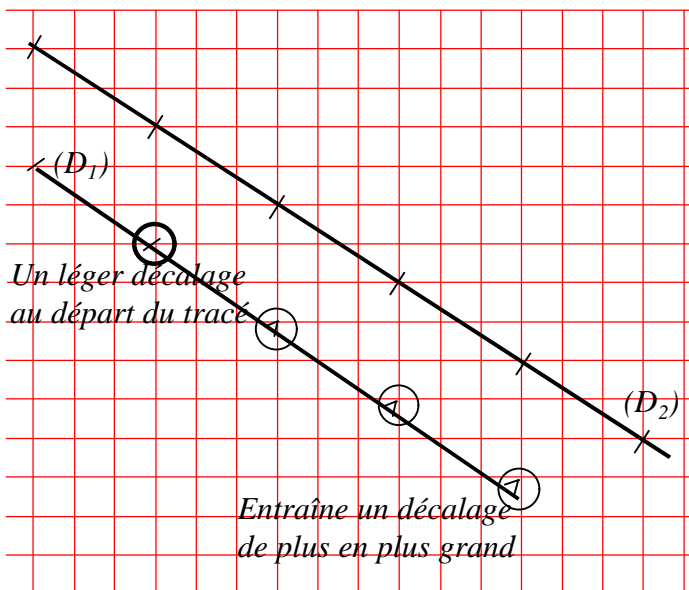
Etc....

C'est à dire qu'à partir du codage le plus simple, $(2d ; 1h)$, on obtient autant d'autres que l'on veut ; on peut :

- Multiplier les deux nombres par un même coefficient. (ils sont proportionnels aux nombres de départ)
- Inverser les deux sens.

Inversement, on peut **simplifier** les nombres du codage en divisant par un même coefficient. C'est toujours le codage simplifié que nous utiliserons par la suite.

Remarque : Il ne vous a sans doute pas échappé qu'il y a ici un net rapport avec la notion de proportionnalité et de simplification des fractions.



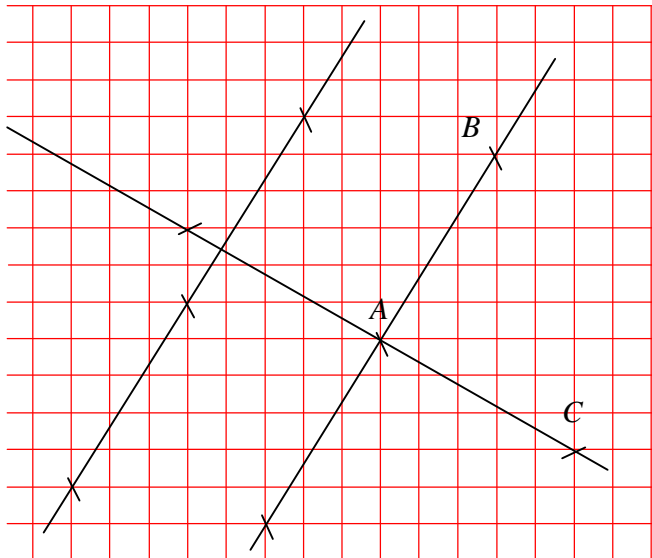
Pour tracer une droite vérifiant un codage donné, on placera le plus grand nombre de points possibles en répétant plusieurs fois ce codage.

En procédant de la sorte, on évitera les droites tracées approximativement.

Sur le dessin ci-contre, si on prend les deux points les plus proches, les deux droites semblent avoir le même codage, mais dès que l'on s'éloigne, seule la droite (D_2) respecte le codage $(3d ; 2b)$, alors que la droite (D_1) s'en écarte.

UTILISER LE QUADRILLAGE

Pour tracer des parallèles et des perpendiculaires :



Soit une droite (D) et un point A hors de (D) donnés.

Pour tracer la parallèle à (D) passant par A :

On détermine un codage de la droite (D) .

A partir du point A , on place un point B en appliquant le même codage que celui de la droite (D)

On place si c'est possible, d'autres points à la suite de B en répétant le même codage, afin d'obtenir un tracé plus précis.

On trace la droite passant par A , B et les autres points s'il y en a.

Pour tracer la perpendiculaire à (D) passant par A :

On détermine le codage correspondant aux perpendiculaires : il s'obtient **en inversant les deux nombres, et en inversant l'un des deux sens**. Par exemple

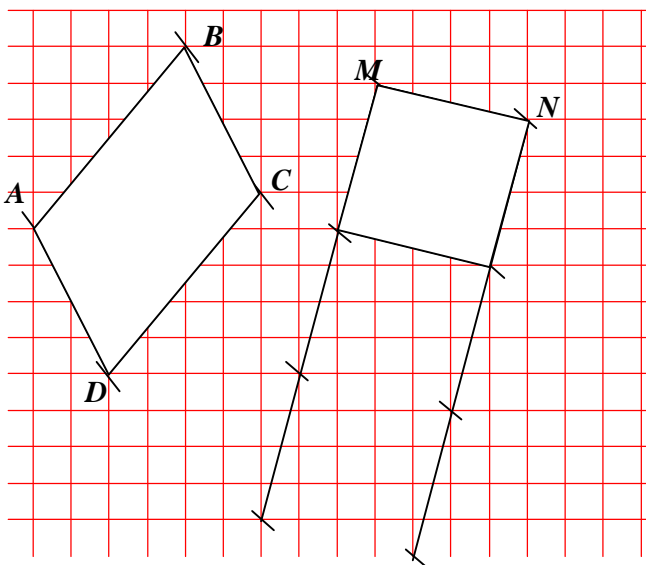
| | | | | |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Codage de (D) | $(3d ; 5h)$ | $(1g ; 3b)$ | $(2d ; 3h)$ | $(4d ; 4b)$ |
| Codage des \perp | $(5d ; 3b)$ | $(3d ; 1b)$ | $(3d ; 2b)$ | $(4d ; 4h)$ |

A partir du point A , on place un point C en appliquant ce codage de perpendiculaire.

On place si c'est possible, d'autres points à la suite de C en répétant le même codage, afin d'obtenir un tracé plus précis.

On trace la droite passant par A , C et les autres points s'il y en a.

Pour tracer des figures particulières :



Un parallélogramme :

Déterminer le codage qui mène de B en A ; ici : $(4g ; 5b)$.

A partir de C , placer le point D en respectant exactement le même codage.

Un rectangle :

Déterminer le codage qui mène de M en N ; ici : $(4d ; 1b)$.

A partir de M et de N , tracer les perpendiculaires à $[MN]$ en inversant le codage : $(1g ; 4b)$.

Utiliser les nœuds convenables pour fermer le rectangle.

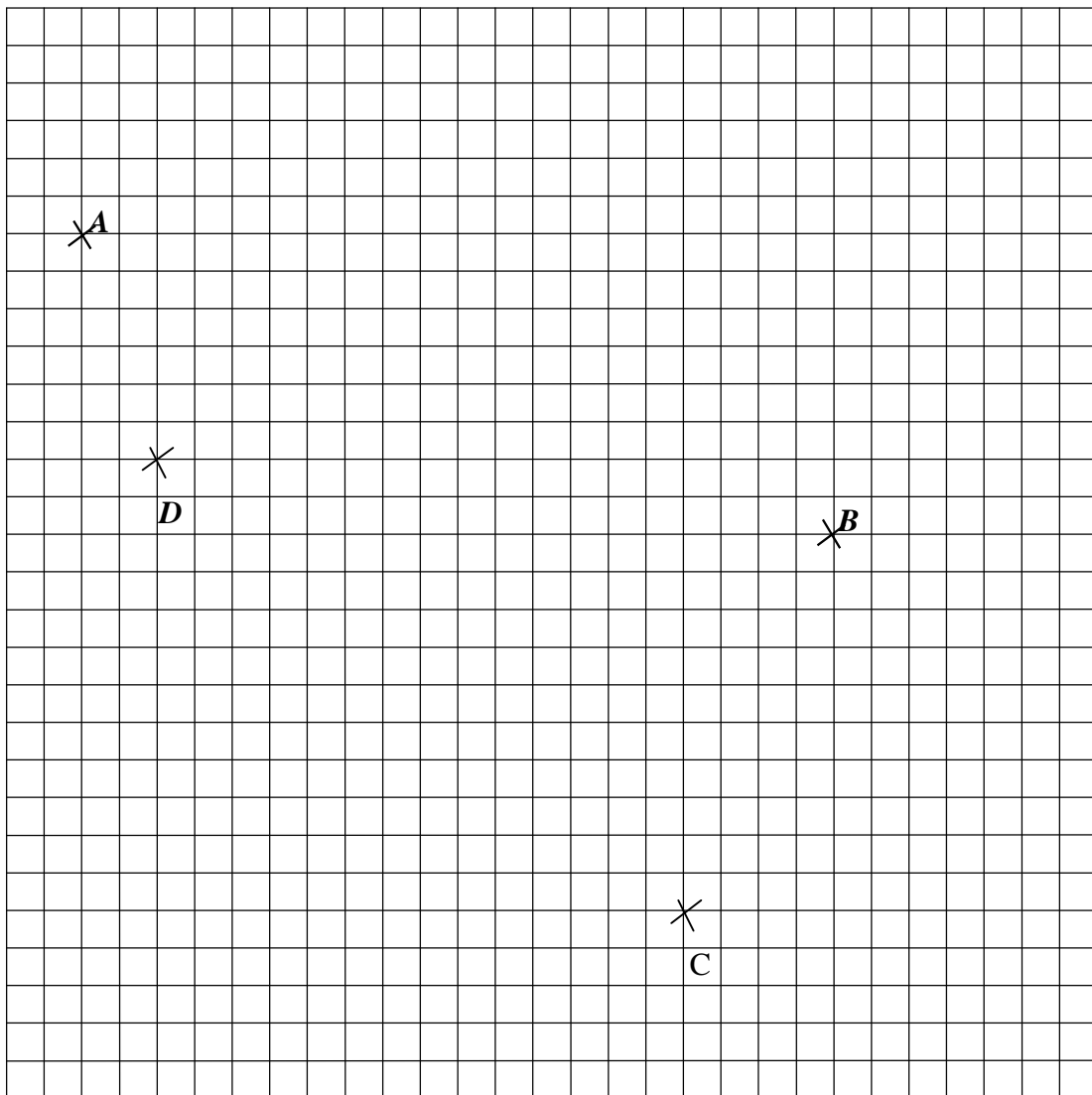
On obtient un **carré** en prenant les

premiers nœuds.

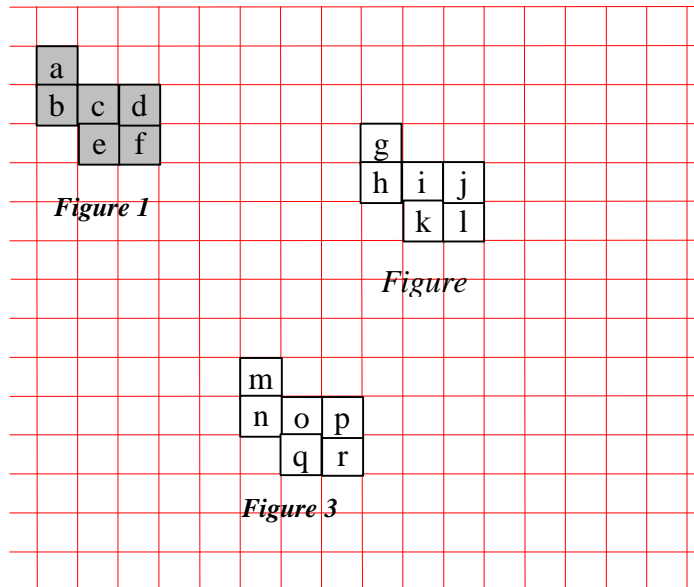
Exercice

Dans le quadrillage suivant :

1. Vérifier que (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
2. Tracer (D_1) perpendiculaire à (AB) passant par A .
3. Tracer (D_2) perpendiculaire à (BC) passant par C
Elles se coupent en K .
4. Tracer (D_3) parallèle à (AD) passant par B .
5. Tracer (D_4) parallèle à (AB) passant par D
Elles se coupent en G .
6. Le triangle BCG est-il rectangle en G ?
7. Placer les points M et N pour que $BGMN$ soit un carré .



TRANSLATION SUR QUADRILLAGE



On a déplacé la forme composée des carrés nommés a, b, c, d, e et f sur le quadrillage.

Dans le **premier cas**,

Le carré a est passé en g. on peut décrire ce déplacement par le codage (8d ; 2b)

b ® h codage : (..... ;)

c ® i codage : (..... ;)

d ® j codage : (..... ;)

e ® k codage : (..... ;)

f ® l codage : (..... ;)

Tous les carrés de la figure 1 ont été déplacés de la même manière

pour obtenir la figure 2.

On dit que la forme a subi une **translation**.

Le carré g est le translaté du carré a.

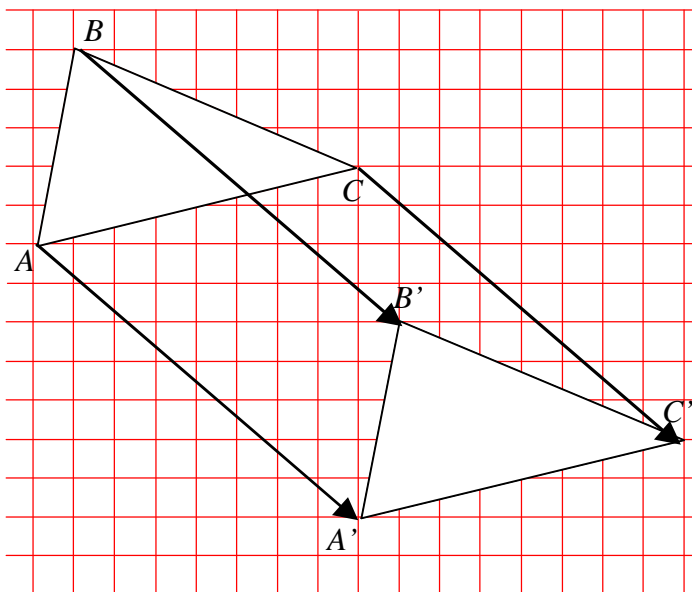
Connaître un élément de la figure et son translaté suffit pour traduire l'ensemble de la figure.

Donner un codage qui permet de décrire la translation qui amène le carré g et l'ensemble de la figure 2 sur le carré m, et l'ensemble de la figure 3.

Donner un codage qui permet de décrire la translation qui amène le carré a et l'ensemble de la figure 1 sur le carré m, et l'ensemble de la figure 3.

Donner un codage qui permet de décrire la translation qui amène le carré m et l'ensemble de la figure 3 sur le carré a, et l'ensemble de la figure 1.

Donner un codage qui permet de décrire la translation qui amène le carré g et l'ensemble de la figure 2 sur le carré a, et l'ensemble de la figure 1.



On a traduit le triangle ABC , pour obtenir le triangle $A'B'C'$.

Quel est le codage correspondant à cette translation ?

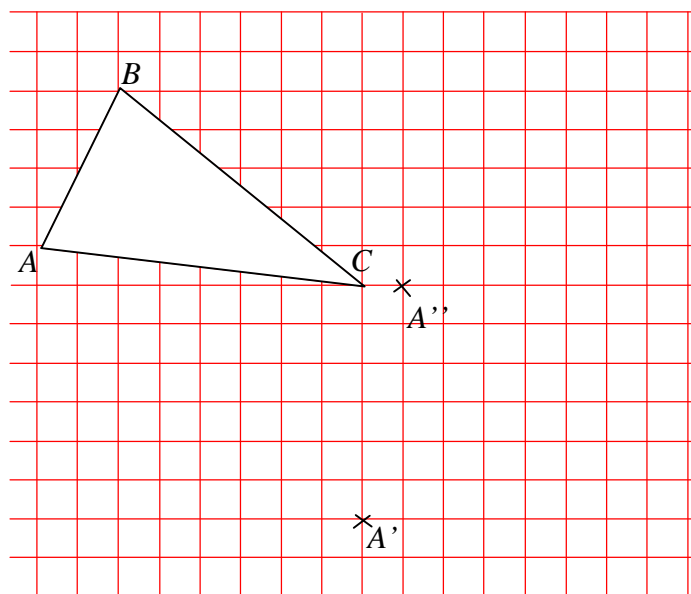
Ce codage sert de modèle à la translation. On lui donne le nom de **vecteur de la translation**.

Les flèches marquées sur le dessin matérialisent cette translation de chacun des trois points A , B et C .

Exercice

Traduire le triangle ABC de manière que A se retrouve traduit en A' dans un premier cas, puis en A'' dans un deuxième cas.

Préciser par un codage quels sont les vecteurs de ces deux translations.



Quelle est la nature de chacun des quadrilatères $AA'B'B$, $ACC'A'$, $B''BCC''$?

POLYGONES INSCRITS

Un cercle est **circonscrit** à un polygone si tous les sommets du polygone sont des points du cercle.

Inversement, dans ce cas, on dit que le polygone est **inscrit** dans le cercle.

Il s'agit ici de quelques constructions classiques de polygones réguliers inscrits dans des cercles.

Les triangles

Tous les triangles ont un cercle circonscrit. Le centre est le point de concours des médiatrices des côtés.

Pour un triangle rectangle, le centre est le milieu de l'hypoténuse.

Le triangle régulier qui a ses trois côtés et ses trois angles égaux est le triangle **équilatéral**.

Les quadrilatères

En général, si on prend des longueurs quelconques pour les côtés, il n'y a que peu de chances que le quadrilatère ait un cercle circonscrit.

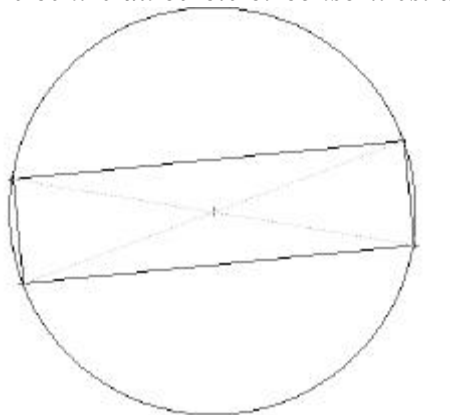
En effet, trois côtés donnent un triangle qui n'a qu'un seul cercle circonscrit. Le quatrième sommet ne pourra se trouver sur le cercle circonscrit que si les mesures des côtés le permettent.

Exemples :

Construire le quadrilatère ABCD avec $AB = 5,2$ cm ; $BC = 3,2$ cm ; $AC = 5,9$ cm ; $AD = 7,3$ cm et $DC = 3,3$ cm. Tracer le cercle circonscrit à ABC. Est-il circonscrit au quadrilatère ABCD ?

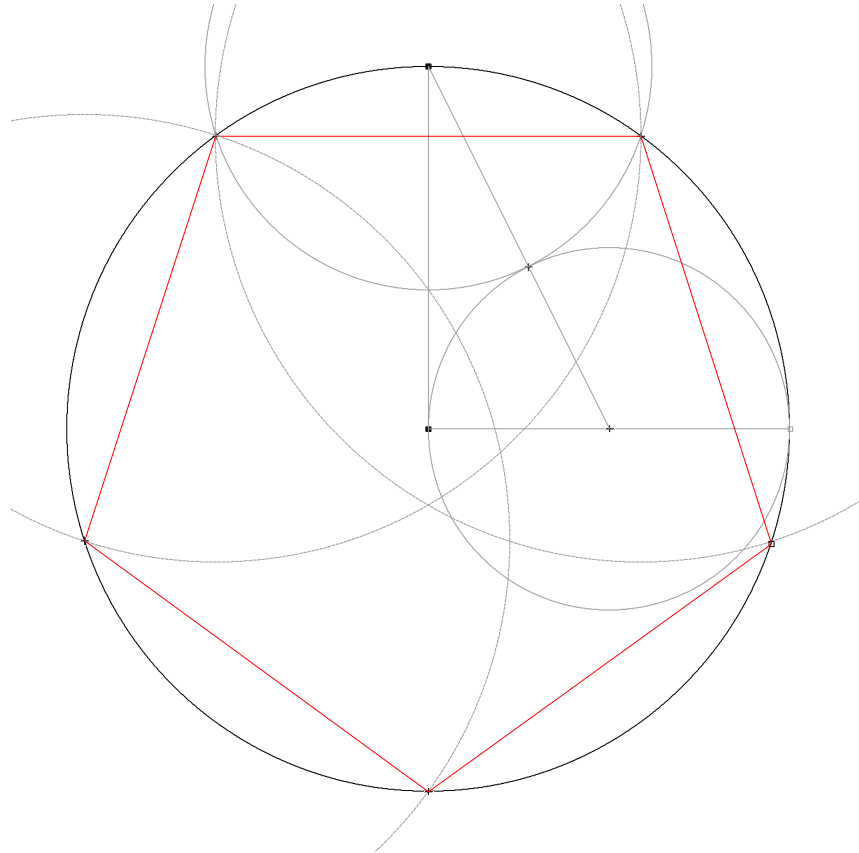
Construire le quadrilatère MNPQ avec $MN = 4,1$; $NP = 4,7$; $MP = 5,6$; $PQ = 3,5$ et $MQ = 5,4$. Tracer le cercle circonscrit à MNP. Est-il circonscrit au quadrilatère MNPQ ?

Le **rectangles** ont tous un cercle circonscrit car les diagonales d'un rectangle ont le même milieu et la même longueur. Le centre du cercle circonscrit est donc le centre du rectangle.



Le quadrilatère régulier qui a ses quatre côtés et ses quatre angles égaux est le **carré**.

Le pentagone



Rédiger la construction du pentagone ci-dessus.

Exercice

Sur un cercle de centre O et passant par un point A :

1. Placer le point B tel que $[AB]$ soit un diamètre.
2. Tracer un diamètre $[CD] \perp [AB]$
3. Tracer la bissectrice de COA qui coupe le cercle en H et en K
4. Tracer la bissectrice de COB qui coupe le cercle en M et en N
Les points $A, N, D, K, B, M, C,$ et h se suivent dans cet ordre sur le cercle.
5. Tracer un arc de centre A , de rayon AO ; il coupe le cercle en E et F .
6. Tracer un arc de centre E , de rayon EO ; il coupe le cercle en A et G .
7. Tracer un arc de centre B , de rayon BO ; il coupe le cercle en G et J .

Tracer les figures suivantes ; quelle est la nature de chacune d'elles ?

AGJ

$ACBD$

$AEGBJF$

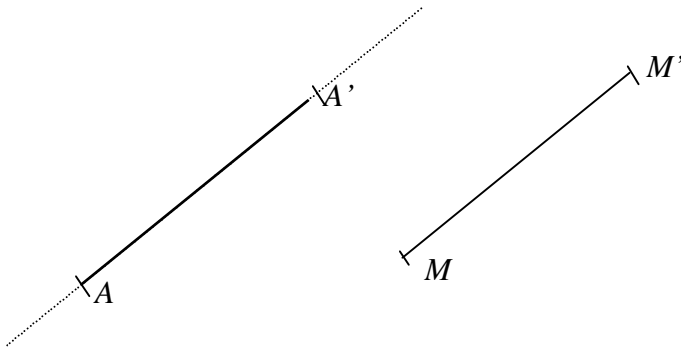
$AHCMBKDN$

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

1. TRANSLATIONS ET VECTEURS 66
2 IMAGE D'UN POINT PAR ROTATION 67
3. QUELQUES REMARQUES SUR LES TRANSFORMATIONS. 67
4. POLYGONES RÉGULIERS 68

1. Translations et vecteurs

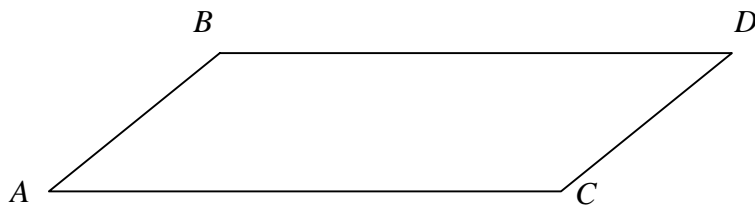
Définition : L'image d'un point M par la translation de vecteur $\vec{AA'}$ est le point M' tel que
 Les demi-droites $[AA')$ et $[MM')$ sont parallèles et de même sens
 $[AA']$ et $[MM']$ ont la même longueur.
 On dit que M' est le translaté de M .



Soit quatre points A, B, C et D ,
 Si D est l'image de C par la translation de vecteur \vec{AB} , alors B est l'image de A par la translation de vecteur \vec{CD} .
 On écrit alors $\vec{AB} = \vec{CD}$. On dit que les deux vecteurs sont égaux.

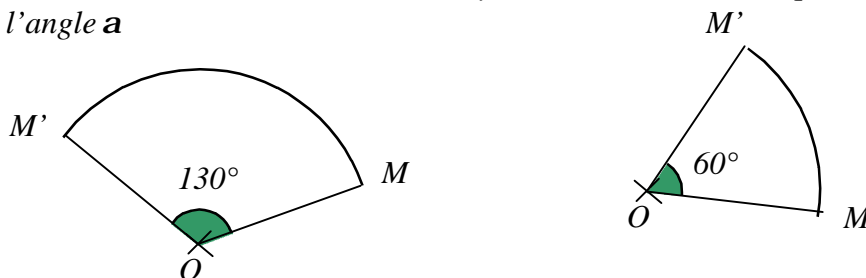
Soit quatre points A, B, C et D ,
 Si $\vec{AB} = \vec{CD}$, alors le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Réciproquement
 Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$ et $\vec{AC} = \vec{BD}$

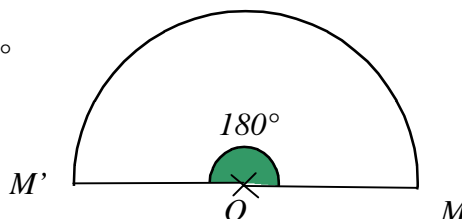


2. Image d'un point par rotation

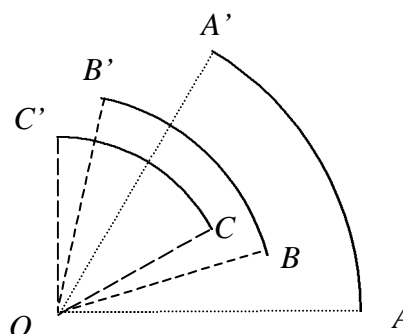
Pour un point O et un angle α donnés, la **rotation** de centre O et d'angle α fait tourner un point M sur le cercle de centre O et de rayon OM , de telle sorte que l'angle $\widehat{MOM'}$ soit égal à l'angle α



La symétrie centrale est une rotation de 180°



Les trois points A , B et C sont transformés par la même rotation de centre O et d'angle α (environ 60°). Ils se déplacent sur des cercles différents car ils sont situés à des distances différentes de O .



3. Quelques remarques sur les transformations.

On regroupe sous le nom de transformations géométriques :

- la symétrie axiale (étudiée en classe de sixième)
- la symétrie centrale (étudiée en classe de cinquième)
- la translation
- la rotation.

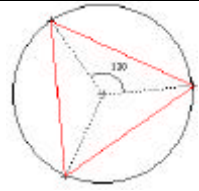
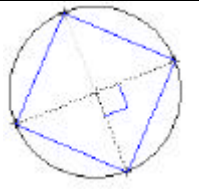
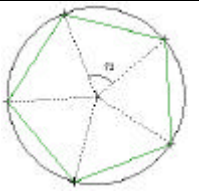
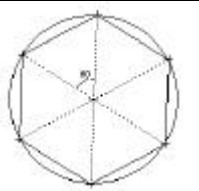

Elles ont des propriétés communes :

- ❖ Elles ne modifient pas la forme des figures (une droite donne une droite, un cercle donne un cercle, etc.)
- ❖ Elles ne modifient pas les mesures (longueurs, angles, aires)
- ❖ Elles conservent les propriétés géométriques des figures (conservation du milieu, conservation des parallèles et des perpendiculaires, etc.)

La projection est par contre totalement différente de ces transformations car elle modifie la forme, les mesures, en général.

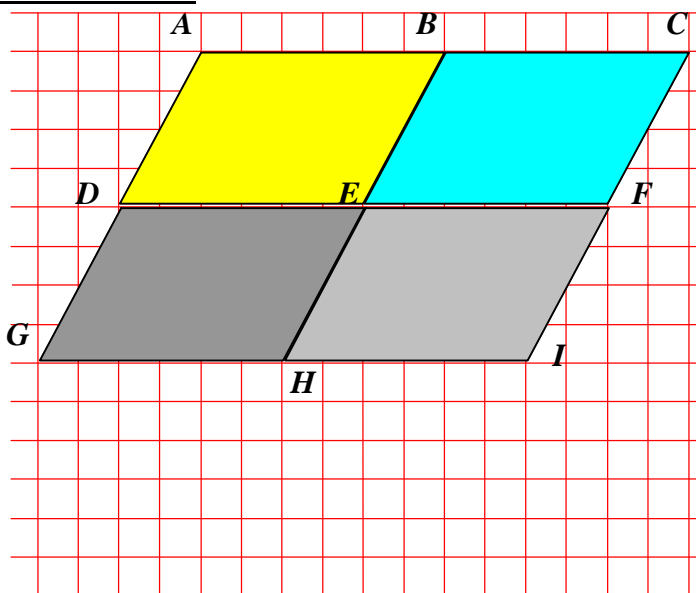
4. Polygones réguliers

Les sommets du polygone sont sur un cercle et les angles au centre sont égaux à un même angle appelé angle au centre du polygone régulier.

| | | | | | |
|------------------------|--|--|--|---|--|
| <i>côtés</i> | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| <i>Nom</i> | <i>Triangle équilatéral</i> | <i>carré</i> | <i>Pentagone régulier</i> | <i>Hexagone régulier</i> | <i>Octogone régulier</i> |
| <i>Angle au centre</i> | $360 \div 3 = 120^\circ$ | $360 \div 4 = 90^\circ$ | $360 \div 5 = 72^\circ$ | $360 \div 6 = 60^\circ$ | $360 \div 8 = 45^\circ$ |
| |  |  |  |  |  |

EXERCICES

Exercice 1



Dresser la liste de tous les vecteurs égaux au vecteur \vec{AB} .
Compléter les égalités suivantes par des points marqués sur la figure :

$$\vec{GD} = \vec{I} \dots$$

$$\vec{F} \dots = \vec{HE}$$

$$\dots \vec{G} = \vec{BE}$$

$$\vec{IE} = \vec{H} \dots$$

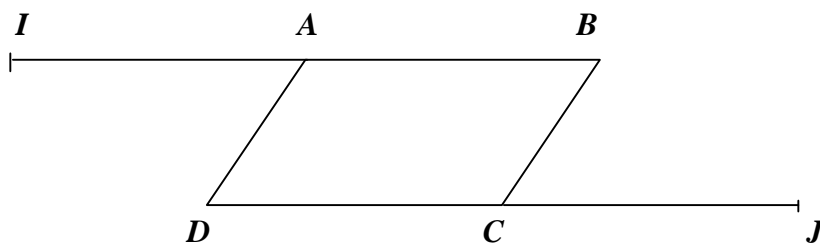
$$\vec{D} \dots = \vec{EC}$$

Exercice 2

Traduire par une illustration chacune des égalités suivantes, puis par une propriété géométrique :

$$\vec{AB} = \vec{CB} \quad \vec{CA} = \vec{CB} \quad \vec{AB} = \vec{BC} \quad \vec{CB} = \vec{AC} \quad \vec{AC} = \vec{AB}$$

Exercice 3



Dans la figure ci-dessus, ABCD est un parallélogramme ; I est le symétrique de B par rapport à A, et J est le symétrique de D par rapport à C.

1. Comparer \vec{IA} et \vec{AB} .
2. Comparer \vec{DC} et \vec{CJ} .
3. Comparer \vec{IA} et \vec{CJ} .
4. Quelle est la nature du quadrilatère IAJC ?

Exercice 4

On considère un triangle ABC ; I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$; D est le symétrique de C par rapport à I , E est le symétrique de B par rapport à J .

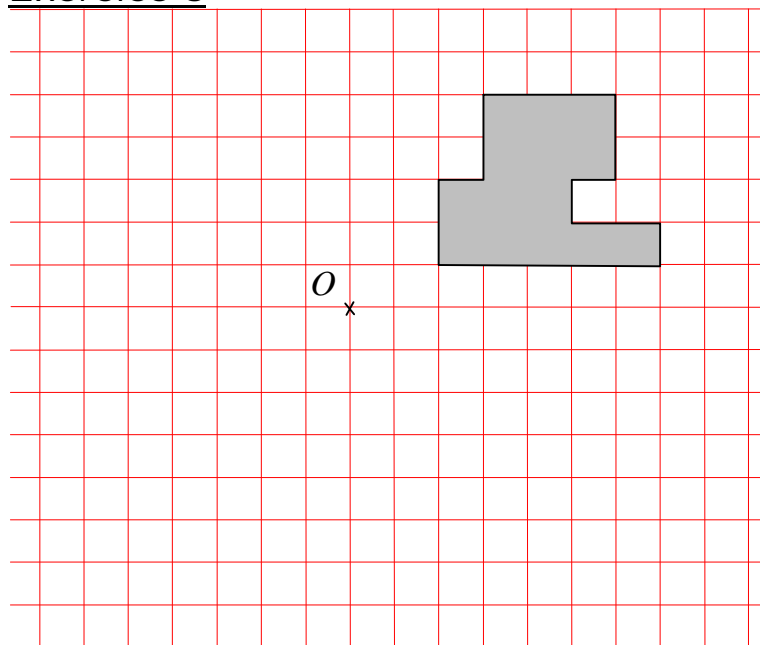
1. Comparer les vecteurs \vec{DA} et \vec{BC} .
2. Comparer les vecteurs \vec{AE} et \vec{BC} .
3. Préciser la position des points D , A et E .

Exercice 5

A et B sont deux points hors d'une droite (d) . M est un point de (d) . M' est le symétrique de A par rapport au milieu de $[MB]$.

1. Faire une figure avec plusieurs positions possibles de M sur la droite (d) .
2. Lorsque M se déplace sur la droite (d) , où et comment se déplace le point M' ?

Exercice 6



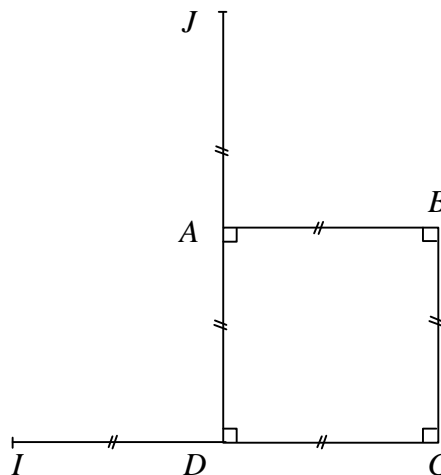
Tracer l'image de la figure par la rotation de centre O et d'angle 90°

Exercice 7

1. Montrer que pour deux points A et B , tout point de la médiatrice de $[AB]$ peut être considéré comme centre d'une rotation transformant A en B .
2. Si H désigne le point d'intersection de $[AB]$ avec sa médiatrice, montrer comment, en connaissant la longueur AB et la distance séparant le centre de la rotation de H , on peut déterminer l'angle de la rotation.

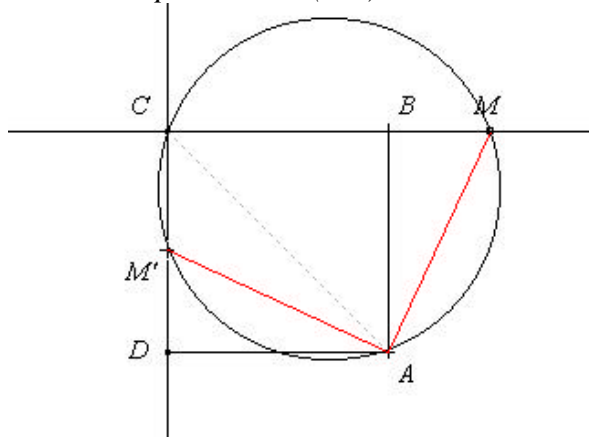
Exercice 8

1. Déterminer une rotation (centre et angle) par laquelle $[JD]$ est amené en $[IC]$
2. Déterminer une rotation (centre et angle) par laquelle $[IC]$ est amené en $[DJ]$
3. Déterminer une rotation (centre et angle) par laquelle $[IB]$ est amené en $[JC]$



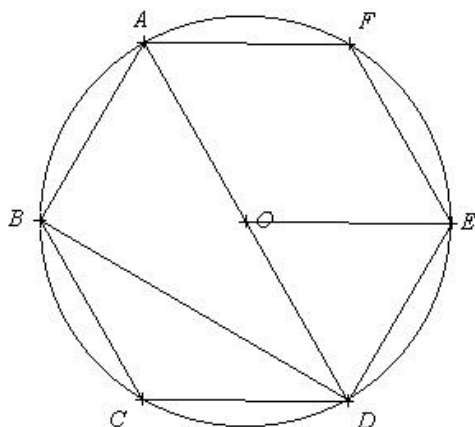
Exercice 9

$ABCD$ est un carré et M est un point de la droite (BC) . Le cercle circonscrit au triangle AMC recoupe la droite (CD) en M' .



1. Montrer que les droites (AM) et (AM') sont perpendiculaires.
2. Quelle est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre A et d'angle 90° ?
3. Quelle est l'image du point M par la même rotation de centre A et d'angle 90° ?
4. Comparer AM et AM' .
5. Comparer BM et DM' .

Exercice 10



$ABCDEF$ est un hexagone régulier.
Déterminer la mesure des angles :

\widehat{DOE} , \widehat{EOA} , \widehat{DAB} , \widehat{ABD} , \widehat{BCD} , \widehat{BDC} .

CORRIGES DES EXERCICES

utiliser le quadrillage

Exercice

(AB) et (BC) sont perpendiculaires car les codages sont les suivants :

Pour (AB) : $(20d ; 8b)$ ce qui est équivalent à $(5d ; 2b)$

Pour (BC) : $(4g ; 10b)$ ce qui est équivalent à $(2d ; 5h)$.

Les deux codages simplifiés correspondent à des droites perpendiculaires.

BCG n'est pas rectangle. En effet, les codages des droites (BG) $(2d ; 6b)$ et (CG) $(6h ; 4h)$ ne sont pas des codages de perpendiculaires.

Pour placer M , on utilise le codage de B vers G : $(2d ; 6b)$ que l'on inverse : $(6g ; 2b)$ et que l'on applique à partir du point G . Puis à partir de M , on applique le codage $(2g ; 6h)$ pour obtenir le point N



Translation sur quadrillage

codage de la translation qui amène le carré g sur le carré m : $(3g ; 6b)$

codage de la translation qui amène le carré a sur le carré m : $(5d ; 8b)$.

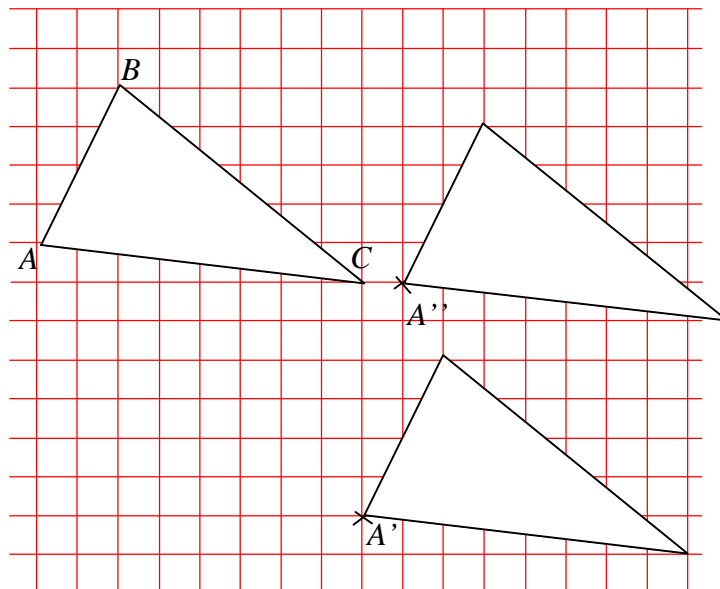
codage de la translation qui amène le carré m sur le carré a : $(5g ; 8h)$.

codage de la translation qui amène le carré g sur le carré a : $(8g ; 2h)$.



Exercice

codage du vecteur $\vec{AA'}$ $(8d ; 7b)$ codage du vecteur $\vec{AA''}$ $(9d ; 1b)$



Tous les quadrilatères $AA'B'B$, $ACC'A'$, $B''BCC''$ sont des parallélogrammes.



Corrigés des exercicesPolygones inscritsLe pentagone

construction du pentagone.

Tracer un cercle \mathbb{C} de centre O .

Tracer deux rayons $[OA]$ et $[OB]$ perpendiculaires.

Placer le milieu I de $[OA]$

Tracer le demi-cercle de diamètre $[OA]$

Il coupe $[BI]$ en M .

Tracer un arc de centre B , de rayon BM . Il coupe \mathbb{C} en E et en F .

Tracer un arc de centre E , passant par F , il coupe \mathbb{C} en G .

Tracer un arc de centre G , de même rayon, il coupe \mathbb{C} en H .

Tracer un arc de centre H , de même rayon, il coupe \mathbb{C} en I

Tracer $EGHIF$, le pentagone régulier

Exercice

AGJ : triangle équilatéral

$ACBD$: carré

$AEGBJF$: hexagone régulier

$AHCMBKDN$: octogone régulier.

Exercice 1

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{HI}$$

$$\overline{GD} = \overline{IF} \quad \overline{FC} = \overline{HE} \quad \overline{DG} = \overline{BE} \quad \overline{IE} = \overline{HD} \quad \overline{DB} = \overline{EC}.$$

Exercice 2

$$\overline{AB} = \overline{CB} \quad A \text{ et } C \text{ sont confondus.}$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} \quad A \text{ et } B \text{ sont confondus.}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \quad B \text{ est le milieu de } [AC]$$

$$\overline{CB} = \overline{AC} \quad C \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \quad B \text{ et } C \text{ sont confondus.}$$

Exercice 3

$\overline{IA} = \overline{AB}$, $\overline{DC} = \overline{CJ}$ et $\overline{AB} = \overline{DC}$, donc $\overline{IA} = \overline{CJ}$, d'où $IAJC$ est un parallélogramme.

Exercice 4

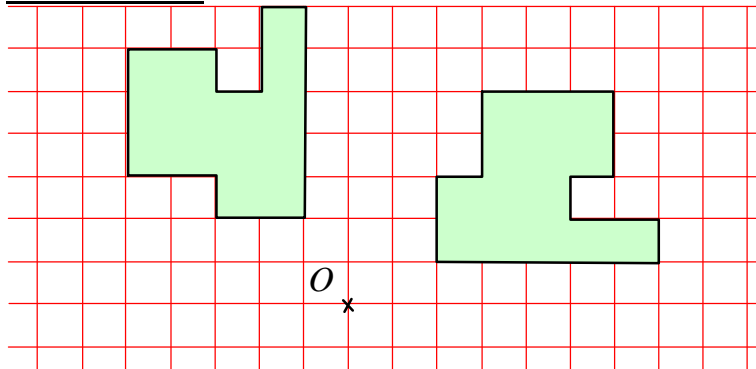
$DABC$ est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu, donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.

$AECB$ est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

Par suite, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$ et donc A est le milieu de $[DE]$

Exercice 5

Lorsque M se déplace sur la droite (d) , le point M' se déplace sur une parallèle à (d) .

Corrigés des exercicesExercice 6

l'image de la figure par la rotation de centre O et d'angle 90°

Exercice 7

1. *Tout point I de la médiatrice de $[AB]$ est à égale distance des points A et B . peut être considéré comme centre d'une rotation transformant A en B , car les longueurs sont conservées.*
2. *En connaissant la longueur AB et la distance IH , on peut calculer BI dans le triangle rectangle BHI par la relation de Pythagore. Puis utiliser le cosinus pour calculer la mesure de l'angle de la rotation.*

Exercice 8

1. *Pour la rotation $[JD]$ est amené en $[IC]$: le centre est à l'intersection des médiatrices de $[IJ]$ et $[DC]$. l'angle de rotation est 90°*
2. *Pour la rotation par laquelle $[IC]$ est amené en $[DJ]$: le centre est à l'intersection des médiatrices de $[ID]$ et $[CJ]$. l'angle de rotation est 90°*
3. *Pour la rotation par laquelle $[IB]$ est amené en $[JC]$ le centre est à l'intersection des médiatrices de $[IJ]$ et $[BC]$ °*

Exercice 9

1. *Le cercle est circonscrit au triangle MCM' qui est rectangle en C . Donc $[MM']$ est un diamètre du cercle. Comme le cercle est aussi circonscrit au triangle MAM' , alors ce triangle est rectangle en A .*
2. *L'image de la droite (BC) par la rotation de centre A et d'angle 90° est la droite (DC) .*
3. *L'image du point M par la même rotation de centre A et d'angle 90° est le point M' car $\widehat{MAM'} = 90^\circ$, et M' est sur (DC) .*
4. *$AM = AM'$ car la rotation conserve les mesures.*
5. *$BM = DM'$ car D est l'image de B et la rotation conserve les mesures.*

Exercice 10

$$\widehat{DOE} = 60^\circ, \widehat{EOA} = 120^\circ, \widehat{DAB} = 60^\circ, \widehat{ABD} = 90^\circ, \widehat{BCD} = 120^\circ, \widehat{BDC} = 30^\circ.$$