

DEVOIR DE MATHEMATIQUES - SUITES DE FAREY -
COLLEGE J. VILAR 1997

Une curiosité mathématique

C'est sans doute le mathématicien Haros qui , vers 1802 , pensa à s'intéresser à ces suites de fractions qu'il appela "fractions propres ".

Un certain Farey publia, en 1816 et souvent sans démonstration des résultats énoncés par Haros. C'est le grand mathématicien Cauchy qui donna ensuite les démonstrations .

Aujourd'hui on appelle "suite de Farey "les suites de fractions que nous allons découvrir maintenant :

DEFINITIONS

I) Une fraction a/b est appelée fraction propre si elle est comprise entre 0 et 1 et si a et b n'ont pas de facteurs communs .

II) Une suite de Farey d'ordre n , notée F_n est la suite de toutes les fractions propres dont le dénominateur ne dépasse pas n , complétée par la fraction $1/1$; le tout rangé dans l'ordre croissant .

Première partie du devoir :

a) Rédiger quelques lignes expliquant qui fût le mathématicien Cauchy ?

b) Que signifie "Pas de facteurs communs "? (On dit aussi "premiers entre eux") . Donnez 2 exemples et 1 contre exemple avec des nombres à 2 ou 3 chiffres .

c) Fabriquez les suites F_n suivantes : F_2 , F_3 , F_4 , F_5 , et F_6 .

Et voici maintenant deux résultats troublants :

A) Prenez trois fractions successives d'une suite de Farey : a/d , b/e et c/f . On a

toujours
$$\frac{b}{e} = \frac{a+c}{d+f}$$
 (Attention,cela ne signifie pas que b/e est la somme des fractions qui l'entourent)

B) Si a/c et b/d sont 2 fractions successives d'une suite de Farey
alors
 $bc - ad = 1$

Deuxième partie du devoir

Prenez 2 suites de Farey et vérifiez avec des exemples ces deux théorèmes . Faites au moins 5 ou 6 calculs .

Troisième partie du devoir

Pour chacune des suites F_4 , F_5 et F_6 dessinez un segment gradué entre 0 et 1 et placez les éléments de la suite sur ce segment