CHAPITRE 4
LE TRIANGLE RECTANGLE

CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

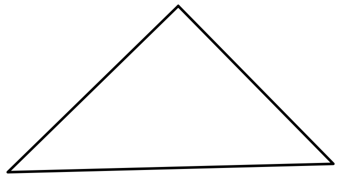
Propriété à démontrer *:*
Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.

Données*:*

1.ABC est rectangle en A

2.I milieu de [BC]

3.A' symétrique de A par rapport à I



Montrons que ACA'B est un parallélogramme

Montrons que ACA'B est un rectangle

Montrons que A, B et C sont sur un même cercle

Conclusion

CARRES - RACINES CARREES

Exercice 1

On appelle carré parfait tout nombre qui est le carré d'un nombre entier.
Compléter le tableau des premiers carrés parfaits:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2										
a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2										

Vérifier que $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$

Il est facile de calculer $40^2 =$ *donc* $41^2 =$
$120^2 =$ *donc* $121^2 =$

Exercice 2

Compléter le tableau suivant :

x	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
x^2											

Quel est le point commun à toutes les valeurs de x proposées ?

Trouver une méthode permettant de calculer rapidement les carrés de ces nombres.

Exercice 3

Compléter le tableau suivant:

a^2				16	49	144	10 000	5 625	1 681	0,04	- 81
a	0,4	5,2	12								

Quelques remarques:
Les nombres négatifs …………………………………………………………………………

Les nombres inférieurs à 1 ……………………………………………………………………

$(3^2 + 4^2) =$ …… ; $7^2 =$ …… $40^2 + 9^2 =$ ………… *et* $41^2 =$ ……

Donc la somme de deux carrés …………………………………………………………………

Exercice 4

*On appelle **racine carrée** du nombre positif a, le nombre positif dont le carré est égal à a ; on l'écrit* $\sqrt{a}$.

$\sqrt{100} =$ $\sqrt{25} =$ $\sqrt{64} =$ $\sqrt{121} =$

$\sqrt{529} =$ $\sqrt{0{,}16} =$ $\sqrt{441} =$

$\sqrt{2} \approx$ $\sqrt{3} \approx$ $\sqrt{5} \approx$

$\sqrt{10} \approx$ $\sqrt{48} \approx$ $\sqrt{50} \approx$

CALCUL APPROCHE DE LA RACINE CARREE

La méthode sur un exemple :

Si on veut calculer la racine carrée du nombre 4 258, par exemple.

On va disposer les nombres en tableau comme dans une division
On fractionne l'écriture du nombre 4 258 en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

42 58	*A*
B	*C*

On cherche le nombre le plus grand dont le carré est inférieur à la première tranche de gauche (ici : 42) :
c'est 6, car $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$. On place 6 en A.
On soustrait ce carré à 42, il reste 6.
On abaisse la tranche suivante pour former le nombre 658.

42 58	*6*
- 36	
6 58	

On double le nombre qui est en A. On obtient 12.
On cherche le chiffre u le plus grand tel que le produit <u>12u</u> ´ u soit inférieur à 658. (dans l'écriture <u>12u</u>, u représente le chiffre des unités).
On a 125 ´ 5 = 625 et 126 ´ 6 = 756. c'est donc 5 qui convient. On place ce chiffre dans A à la suite de 6; ce qui donne pour l'instant le nombre 65.
Dans B, on soustrait 625 à 658, il reste 33. On abaisse deux 0, et on place la virgule en A.

42 58	*65*
- 36	*125 ´ 5 = 625*
658	
- 625	
3300	

On double le nombre qui est en A. On obtient 130 (sans s'occuper de la virgule).
On cherche le chiffre u le plus grand pour que <u>1 30u</u> ´ u soit inférieur à 3 300.
On a 1 302 ´ 2 = 2 604 et 1 303 ´ 3 = 3 909. C'est donc 2 qui convient, on le place en A.
Dans B, on soustrait 2 604 à 3 300, il reste 696. On abaisse deux 0.

42 58	*65,2*
- 36	*125 ´ 5 = 625*
658	*1302 ´ 2 = 2604*
- 625	*13045 ´ 5 = 65225*
3300	
- 2604	
69600	

On double le nombre qui est en A. On obtient 1 304 (sans s'occuper de la virgule).
On cherche le chiffre u le plus grand tel que le produit <u>13 04u</u> ´ u soit inférieur à 69 600.
On a 13 045 ´ 5 = 65 225. Donc 5 convient; on le place en A.
Et ainsi de suite………

LE TRIANGLE RECTANGLE.

1. Propriétés du triangle rectangle

Angles du triangle rectangle

En application de la règle de la somme des angles d'un triangle, et parce qu'un triangle rectangle a un angle droit, on peut énoncer la propriété suivante :

***Propriété**:*
Si ABC est rectangle en A, alors les angles B et C sont complémentaires.

Construction d'un triangle rectangle :

- ***Si on connaît les deux côtés de l'angle droit :***

Triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5 et AC = 3.
On trace deux segments perpendiculaires avec les dimensions demandées. Le troisième côté(l'hypoténuse) s'obtient sans que l'on ait à connaître sa longueur.

- ***Si on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.***

Triangle MNP rectangle en N tel que MN = 4 et MP = 8.
On trace [MN] de 4 cm.
On trace [Nx) la perpendiculaire à [MN]
On trace un arc de cercle de centre M et de rayon 8 cm, qui coupe [Nx) en P.
La longueur du troisième côté est ici aussi imposée par la construction.

***Conclusion** : Dans un triangle rectangle, la connaissance de deux des côtés impose la longueur du troisième côté. C'est cette relation entre les trois côtés qui sera étudiée dans la propriété dite de Pythagore.*

Cercle circonscrit

*Pour tout triangle, il existe un cercle unique passant par les trois sommets; on l'appelle le cercle **circonscrit** au triangle. On dit que le triangle est **inscrit** dans le cercle.*
Le centre de ce cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.

***Propriété**:*
Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

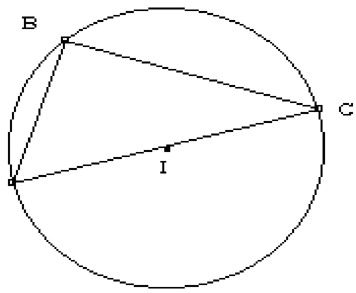


Illustration:
Hypothèses:
- *ABC est rectangle en B*
- *I est le milieu de [AC]*

Conclusion:
I est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Propriété de la médiane

C'est une conséquence immédiate de la propriété précédente

Propriété:
Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Illustration:

Hypothèses:	*Conclusion*
• *ABC est rectangle en B* • *I est le milieu de [AC]*	*AI = BI = CI = 1/2 AC*

2. Énoncé de Pythagore

On a vu que les longueurs des côtés du triangle n'étaient pas indépendantes, et que si l'on en connaissait deux, la troisième était imposée. La relation entre ces trois longueurs porte le nom de propriété de Pythagore (on a donné à cette propriété le nom d'un grand mathématicien grec qui n'est pas pour grand chose dans la découverte de cette propriété).

Propriété:
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Illustration:

Hypothèses:	*Conclusion*
KLM est rectangle en M	$KL^2 = LM^2 + KM^2$

Deux exemples d'utilisation de la propriété :

- ***Si on connaît les deux côtés de l'angle droit :***

Triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5 et AC = 3.
La relation de Pythagore permet d'écrire :
$BC^2 = AB^2 + AC^2\ 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$. *Et donc* $BC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$

- ***Si on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.***

Triangle MNP rectangle en N tel que MN = 4 et MP = 8.
La relation de Pythagore permet d'écrire :

$MP^2 = MN^2 + NP^2$, donc $NP^2 = MP^2 - MN^2 = 88^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$, d'où $NP = \sqrt{48} \approx 6{,}9$

3. Comment montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Si l'une des propriétés du triangle rectangle est mise en défaut, alors le triangle ne peut pas être rectangle.
Si le triangle n'a pas d'angle droit, ……
Si le triangle n'a pas deux angles complémentaires, ……
Si le centre du cercle circonscrit n'est pas le milieu d'un côté, ……
Si aucune médiane n'est égale à la moitié de la longueur du côté auquel elle est liée, ……
Si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres, ……
Alors , dans chacun de ces cas, le triangle n'est pas rectangle.

4. Comment montrer qu'un triangle est rectangle

On a fait un bilan des diverses propriétés que l'on connaît du triangle rectangle.
La question est maintenant de savoir si ces propriétés sont suffisantes pour définir un triangle rectangle; c'est à dire si elles suffisent pour obliger le triangle à être rectangle.
Ces propriétés portent sur les angles, le cercle circonscrit, la médiane relative à l'hypoténuse, les longueurs des côtés.
*Il s'agit donc d'étudier les **réciproques** de chacune des propriétés précédentes.*

Réciproque de la propriété des angles aigus :
Si un triangle a deux angles complémentaires, alors le triangle st rectangle.

Réciproque de la propriété du cercle circonscrit :
Si un triangle est inscrit dans un cercle avec un de ses côtés diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle.

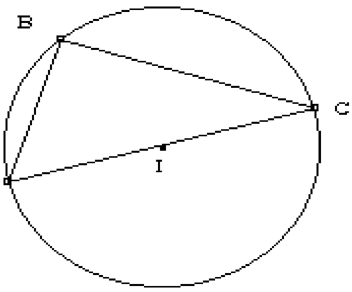


Illustration:
Hypothèses:
- *A, B et C sont sur le cercle $\mathcal{C}$*
- *[AC] est un diamètre de $\mathcal{C}$*

Conclusion:
ABC est rectangle en B.

***Réciproque de la propriété de la médiane** :*
Dans un triangle, si la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle; et ce côté est son hypoténuse.

Illustration:

Hypothèses:	*Conclusion*
• *I est le milieu de [AD]* • *MI = 1/2 AD*	*AMD est rectangle en M*

<u>Réciproque de la propriété de Pythagore :</u>
Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côté, alors le triangle est rectangle.

<u>Illustration:</u>

<u>Hypothèses:</u>	*<u>Conclusion</u>*
$KL^2 = LM^2 + KM^2$	*KLM est rectangle en M*

<u>Bilan</u> *:*
On peut prouver qu'un triangle est ou n'est pas rectangle lorsque :
On connaît deux des angles.
On connaît la position du centre du cercle circonscrit.
On sait que trois longueurs sont égales (la médiane et deux moitiés de côtés).
On connaît les longueurs des trois côtés.

ÉNONCE DE PYTHAGORE

Calculer une distance avec l'énoncé de Pythagore:

Méthode

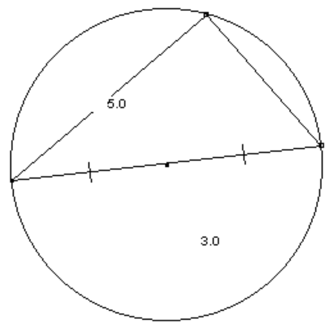
- *Chercher le ou les triangles rectangles et dire pourquoi ils le sont.*
- *Rechercher l'hypoténuse (c'est le plus grand côté) du triangle rectangle dans lequel on veut appliquer l'énoncé de Pythagore.*
- *Écrire la relation de Pythagore dans ce triangle.*
- *Exprimer la longueur recherchée en fonction des deux autres.*
- *Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs.*
- *Calculer ou résoudre.*

Exemple

Énoncé:

Sur un cercle de diamètre [SP] et de rayon 3 cm, placer un point I tel que SI = 5 cm.
Faire une figure et calculer IP.

Solution:



Le point I est un point du cercle de diamètre [SP],donc le triangle SIP est rectangle en I.
On peut appliquer l'énoncé de Pythagore:
$SP^2 = SI^2 + IP^2$ *d'où* $IP^2 = SP^2 - SI^2$
$SI = 5$ *et* $SP = 6$ *donc* $IP^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$
Conclusion *:* $IP = \sqrt{11}$

Exercice

1. *Construire un triangle RIS, rectangle en I tel que RS = 13 cm et RI = 12 cm .*

Calculer IS.

2. *Construire un triangle TOC rectangle en O tel que TO = 64 mm et OC = 48 mm. Calculer TC.*

3. *Construire un triangle MER rectangle en E tel que ER = 60 et MR = 87.*

Calculer ME.

4. *Construire un triangle COQ rectangle en O tel que C0 = 7 cm et OQ = 5 cm.*

Calculer QC et donner son arrondi au mm.

5. *Construire un triangle NIL rectangle en I tel que NL = 8 et NI = 6,5.*

Calculer IL et donner son arrondi au dixième.

Montrer qu'un triangle est rectangle

Méthode

- *On repère le triangle qui semble rectangle dans la figure.*
- *On cherche le plus grand côté et on calcule le carré de sa longueur.*
- *On calcule la somme des carrés des deux autres côtés.*
- *On compare les deux résultats obtenus et on conclue.*

Exemple

Énoncé:

Le triangle LIT tel que : $LI = 72$, $IT = 54$ et $LT = 90$ est-il rectangle?
Si oui, quels sont les deux côtés perpendiculaires?

Solution:

LT est le plus grand côté. $LT^2 = 90^2 = 8100$
$LI^2 + IT^2 = 72^2 + 54^2 = 5184 + 2916 = 8100$
Donc $LT^2 = LI^2 + IT^2$; et d'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle LIT est rectangle en I. Les côtés [LI] et [IT] sont perpendiculaires.

Exercice

1. *Montrer que les triangles LAC et LOC tels que $LA = 56$, $LC = 70$, $AC = 42$, $LO = 24$ et $OC = 74$ (toutes les longueurs en mm) sont rectangles.*
2. *Construire un triangle BEC tel que $BE = 87$, $BC = 63$, $EC = 60$ et le point S tel que $CS = 80$, $ES = 100$ et $BS > 100$. Montrer que les points B, C et S sont alignés.*
3. *L'unité de longueur étant le cm, construire le triangle LIN tel que $LI = 4,8$, $IN = 3,6$ et $LN = 6$. Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.*

EXERCICES DE DEMONSTRATION

Exercice 1

Dans un triangle isocèle ABC de sommet principal A, AB = AC. Soit D le symétrique du point B par rapport à A.

1. *Montrer que le triangle BCD est rectangle.*
2. *Soit E le milieu de [DC], montrer que (AE) est la médiatrice de [DC].*
3. *Le cercle de centre C et de rayon CA coupe (AE) en F. Montrer que ACFD est un losange.*

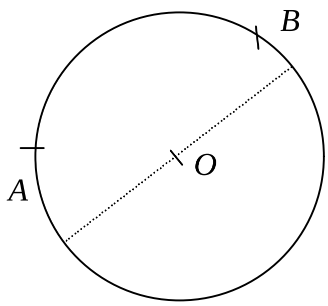
Exercice 2

1. *Construire un triangle MAE tel que ME = 5, EA = 12 et MA = 13.*
2. *Montrer que MAE est rectangle en E.*
3. *Soit I un point de (ME) tel que MI = 21 et que E soit un point de [MI]. Calculer AI.*
4.

Exercice 3

1. *Dans les deux cas suivants, expliquer pourquoi le triangle ABC n'est pas rectangle.*
- *ABC est tel que les angles en A et en B mesurent respectivement 39° et 41°.*
- *ABC est tel que AB = 9,2 , BC = 5,3 et AC = 10,6 (tout ça en cm.)*

2. *ℂ est le cercle circonscrit à ABC.*
   Où peut-on placer le point C pour que le triangle ABC ne soit pas rectangle?
   (indiquer tous les points possibles)



Exercice 4

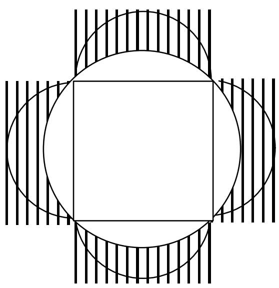
FIN est un triangle équilatéral. ℂ est le cercle de centre I et de rayon IF. D est le point tel que F est le milieu de [ID].
Montrer que (DN) est tangente à ℂ en N.

Exercice 5

ℂ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].C est un point du cercle, distinct de A et de B. Tracer les tangentes au cercle ℂ en A,B et C. La tangente en C coupe les deux autres en R et S.
Déterminer la nature des triangles AOR, RCO et CBO.

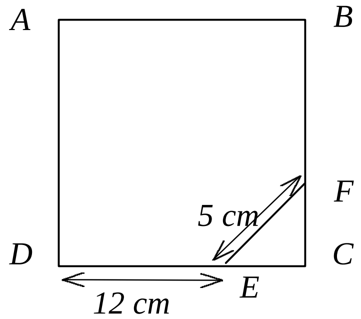
Exercice 6

Quelle est l'aire de la partie hachurée si le côté du carré mesure 10 cm?
Exprimer cette aire en fonction de a, dans le cas général où le carré a pour côté la longueur a.



Exercice 7

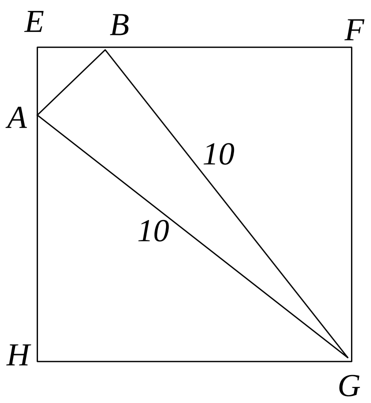
On considère la figure ci-contre, dans laquelle ABCD est un carré de côté 16 cm.
Relier chaque expression de la colonne de gauche à celle sui lui correspond dans la colonne de droite.



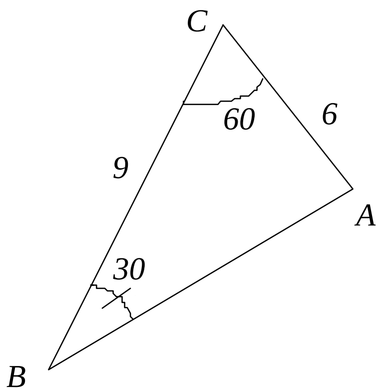
AE^2		$16^2 + 13^2$
EC		$16 - 3$
CF		$400 + 25$
BF		$16 - 12$
AF^2		$16^2 + 12^2$
$AE^2 + EF^2$		$\sqrt{5^2 - 4^2}$

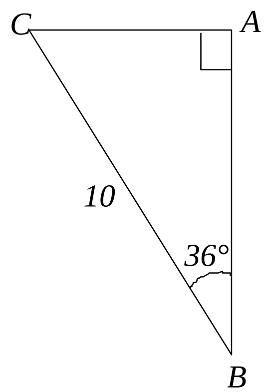
Exercice 8

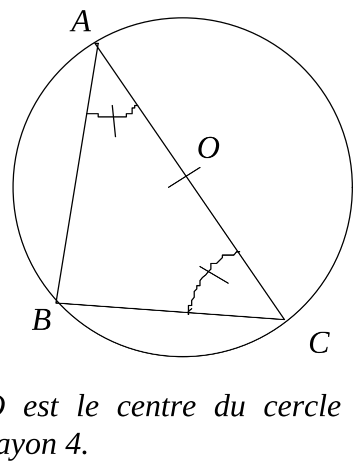
Dans quel cas dispose-t-on de suffisamment d'informations pour pouvoir utiliser l'énoncé de Pythagore pour calculer la longueur AB? (Expliquer)



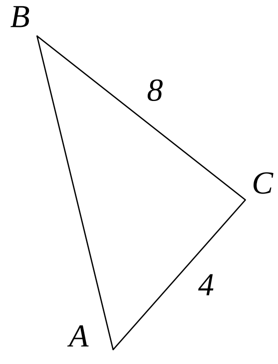
EFGH est un carré de côté 6.

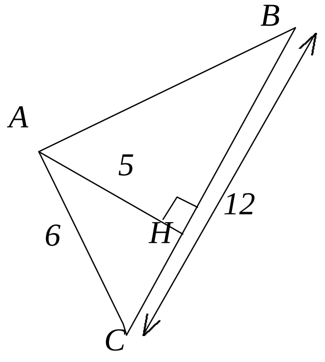






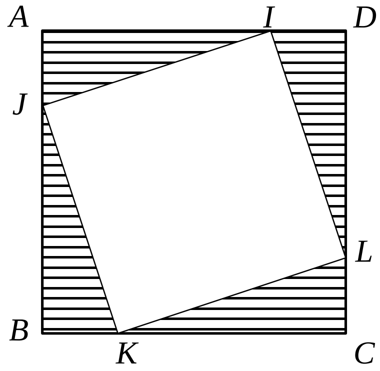
O est le centre du cercle de rayon 4.





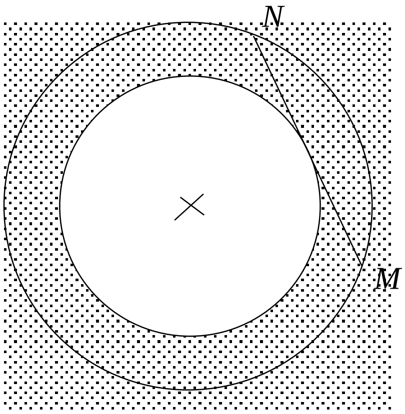
Exercice 9

Dans le carré ABCD, les points I, J, K et L sont placés sur les côtés au quart de la longueur pour former le carré IJKL.
Exprimer l'aire du carré IJKL par rapport à celle de ABCD.



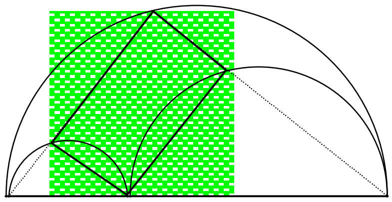
Exercice 10

Les deux cercles sont concentriques.
[MN] est une corde tangente au plus petit des deux. Calculer l'aire de la couronne circulaire sachant que MN = 8.



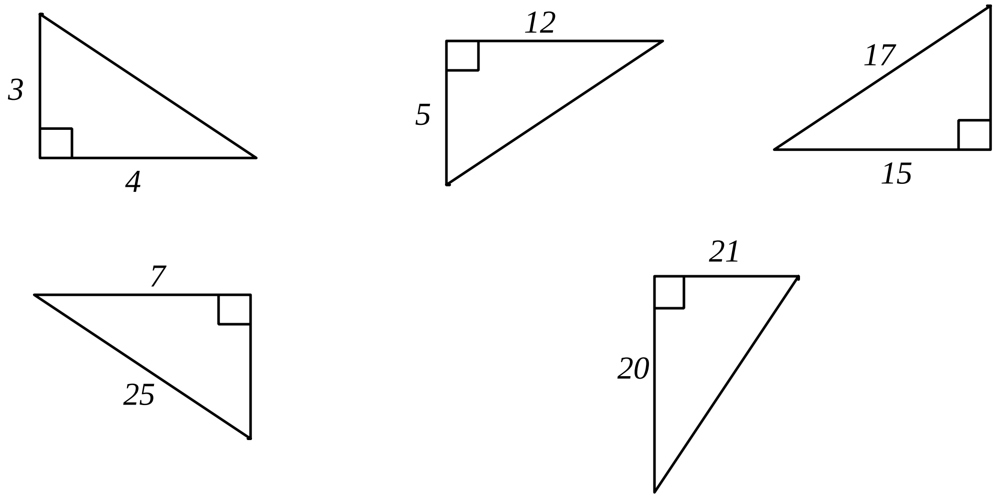
Exercice 11

1. *Décrire la construction de la figure ci-contre.*
2. *Le quadrilatère obtenu est-il un rectangle ?*



Exercice 12

Calculer la longueur du côté qui n'est pas donnée dans chacun de ces triangles rectangles.



m et n sont deux nombres entiers, avec m plus grand que n. A partir de ces nombres, on définit trois nombres a, b et c de la manière suivante :
$a = m^2 + n^2$
$b = m^2 - n^2$
$c = 2mn$
Compléter le tableau suivant :

n \ m	2	3	4	5
1	***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**
2		***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**
3			***a* =** ***b* =** ***c* =**	***a* =** ***b* =** ***c* =**
4				***a* =** ***b* =** ***c* =**

Vérifier que l'on retrouve dans ce tableau les longueurs des trois côtés des triangles rectangles étudiés précédemment.
Vérifier que ces trois nombres a, b et c vérifient dans chaque cas l'égalité de Pythagore.