# *Esquisse de cours sur l'apprentissage du calcul algébrique à une variable*

## *Classe de quatrième*

L'idée centrale est de montrer le lien permanent entre 1) la géométrie ( notamment le calcul d'aire et donc le calcul sur les grandeurs ), 2) les opérations arithmétiques sur les "nombres purs" et le calcul algébrique, ce dernier lien basé essentiellement sur la correspondance entre numération de position et algèbre des polynômes ( c'est-à-dire sur la correspondance entre les ordres dans l'écriture en base dix et les degrés des monômes). Il est donc possible de faire réfléchir les élèves sur les correspondances entre structures sans pour cela partir de la définition abstraite de ces structures tout en leur donnant des outils de calcul efficaces.

D'autre part, il serait important de savoir comment intégrer ce type de cours dans le programme actuel qui est plutôt basé sur une vision fonctionnelle et non algébrique du polynôme et élude le rapport entre opérations arithmétiques et opérations sur les polynômes. Une bonne solution serait de ne pas commencer par la multiplication des polynômes mais par l'addition de ceux-ci, comme cela se faisait jusqu'aux années 60 ( par exemple dans le Maillard, Cahen et Cahalp de quatrième et troisième chez Hachette ou dans le Monge et Guinchamp chez Belin), mais cela implique une difficulté d'intégration dans la progression actuelle qui est complètement bouleversée si l'on veut utiliser toute la puissance du rapport entre $10^n$ et $X^n$ . L'intérêt de ces méthodes était de donner, pour la pratique du calcul algébrique, le support des opérations arithmétiques, ce qui en facilitait grandement l'apprentissage en s'appuyant sur des mécanismes connus. Le fait de commencer ici directement par la multiplication oblige à ne donner en exemple , dans le début du cours, que des nombres tels que le problème des retenues ne se posent pas, et , d'autre part , d'introduire seulement ensuite les nombres négatifs comme coefficients des monômes.

Enfin , il y aurait aussi

- la possibilité d'extension de ce type de calculs aux puissances négatives de X en utilisant le calcul sur les décimaux

- l'utilisation de la multiplication des polynômes pour justifier la distributivité dans le sens du développement

- l'utilisation de la correspondance entre la division euclidienne des entiers et la division des polynômes pour justifier cette fois ci la distributivité dans le sens de la factorisation ( la factorisation étant une division euclidienne de polynômes qui « tombe juste » ).

La difficulté essentielle est de jauger ce qui est important pour qu'une telle introduction ne soit pas un gadget du type « curiosités mathématiques » tout en restant compatible avec le programme et les progressions actuellement définies.

**Numération de position en base dix et multiplication**

Soit à donner une image géométrique de la multiplication de 1311 par 212 correspondant à l'algorithme de cette opération aussi bien dans la multiplication arabe que dans la multiplication "classique"

Fig 1( Multiplication arabe, nombres purs)

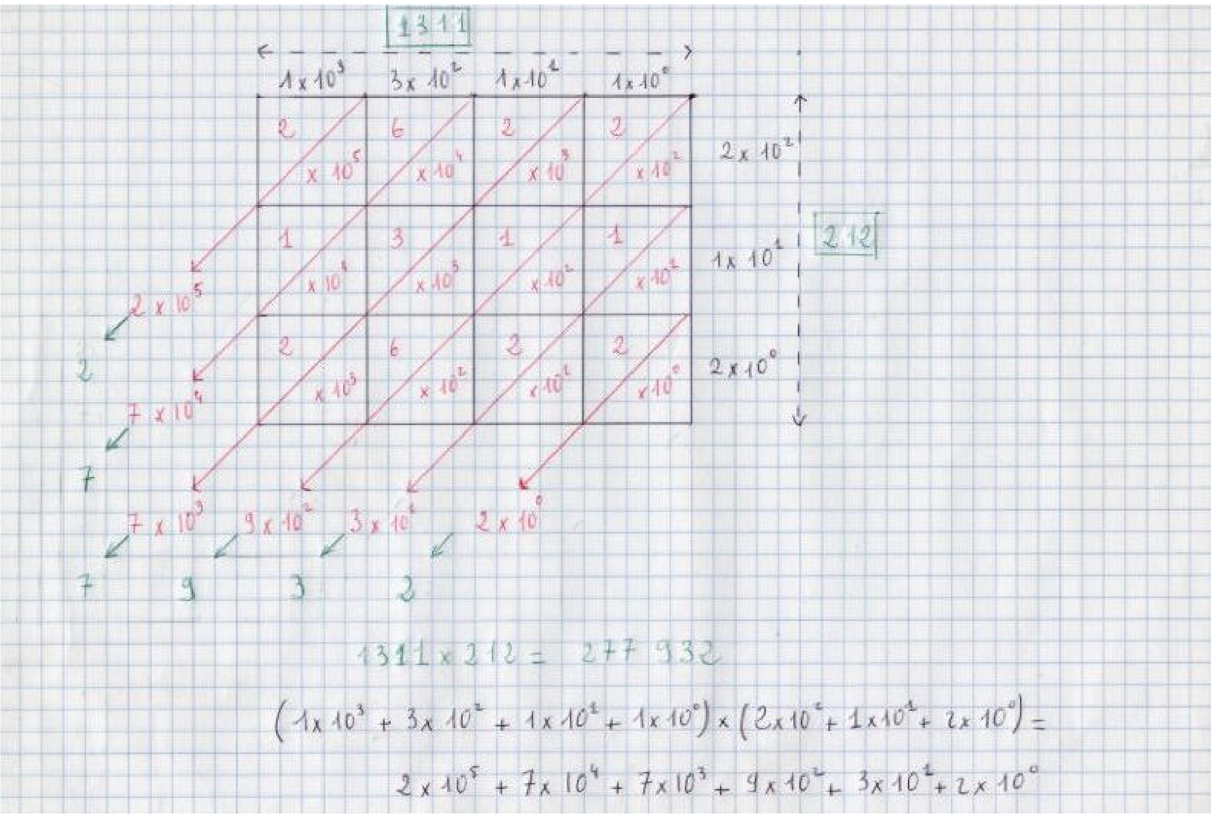
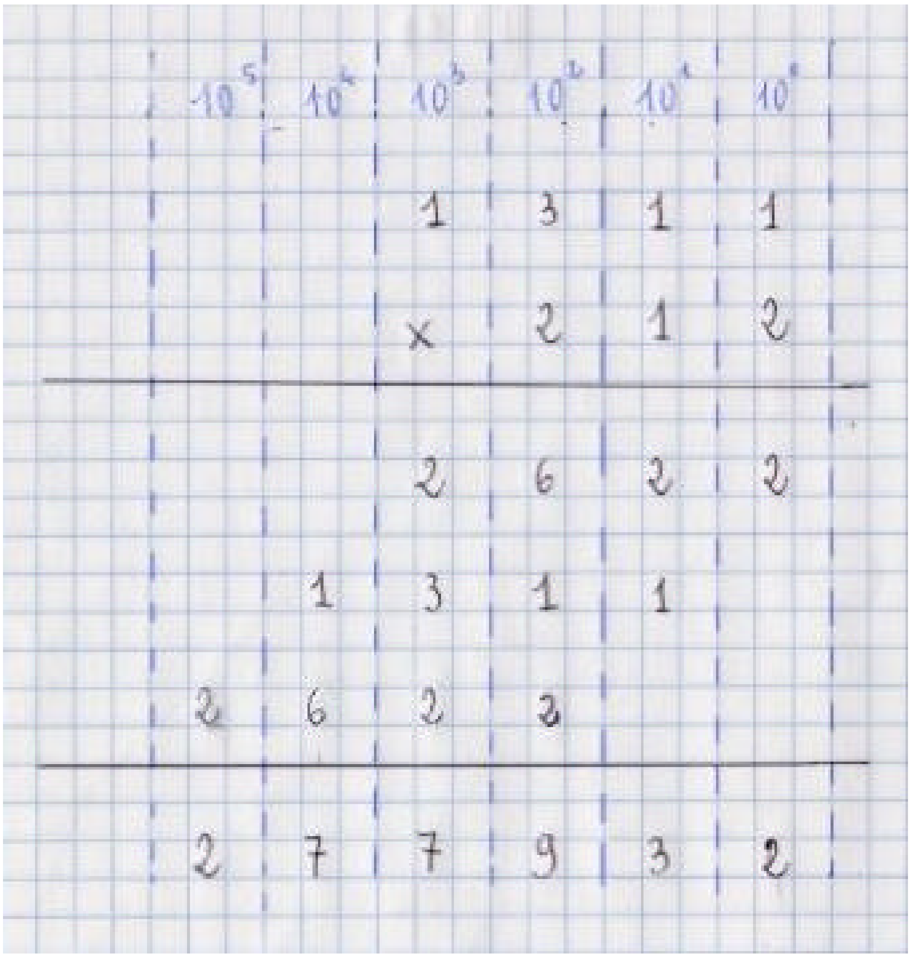


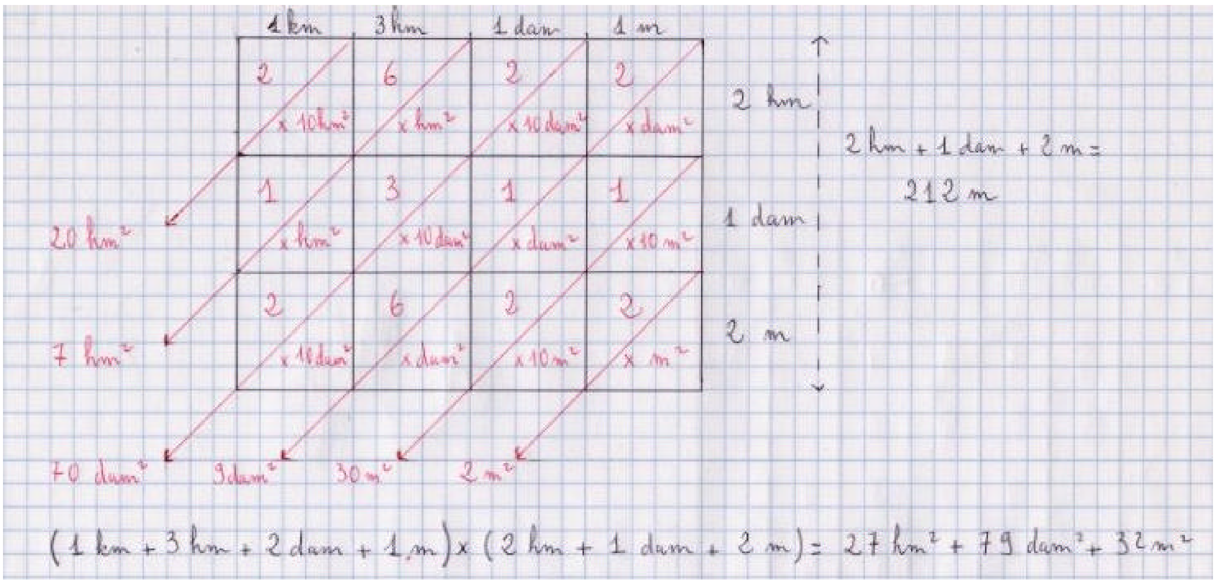

Fig 2: ( multiplication classique : "à l'italienne", nombres purs )



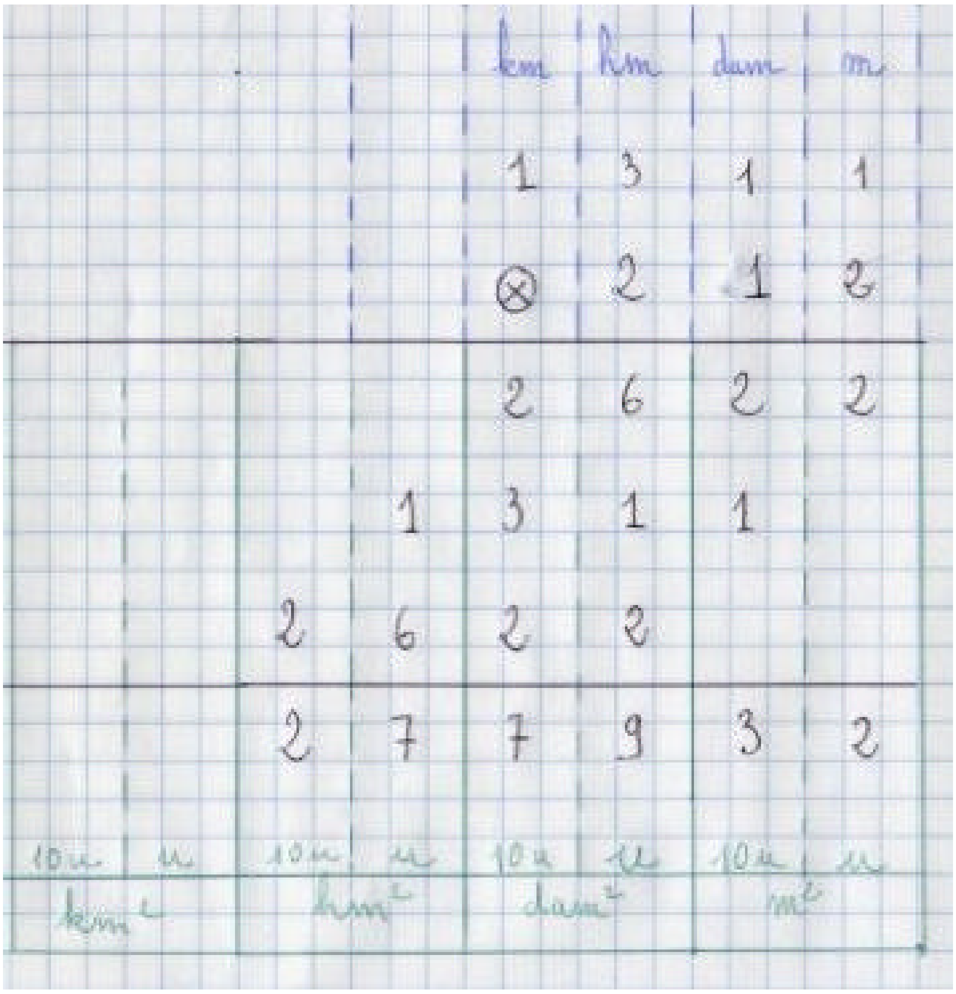

On obtient ici une double équivalence entre l'alignement diagonal des puissances de 10 dans la multiplication arabe et dans l'alignement vertical des puissances de 10 dans la  multiplication à l'italienne.

La forme que prend cette équivalence en calculant les aires ( en s'appuyant cette fois-ci sur la multiplication des grandeurs) , est la suivante :

Fig 3:



ou, sous la forme de la multiplication à l'italienne Fig 4




Ce qui suppose cependant de  rappeler que :

**1 km x 1 hm = 10 hm x 1 hm = 10 hm$^2$ ;**
**1 km x 1 dam = 10 hm x 0,1 hm = 1 hm$^2$;**
**1 km x 1 m = 100 dam x 0,1 dam = 10 dam$^2$;**
**1 hm x 1 m = 10 dam x 0,1 dam = 1 dam$^2$;**
**1dam x 1 m = 10 m x 1 m = 10 m$^2$;**

**<u>Multiplication des polynomes à une inconnue X</u>**

Il est alors utile de faire remarquer que l'ensemble des résultats figurants dans les Figures 1 et 2 restent valables si l'on remplace $10^n$ par $2^n$ , $5^n$ , $7^n$ , $15^n$ **......**  sauf les formules en vert de la figure 1 , c’est-à-dire celles représentant l'écriture en base 10 de 1311 , 212 et de leur produit 277 932.

Par exemple, remplaçons 10 par 2 dans les deux membres de l'égalité suivante ( qui signifie simplement que 1311x 212 = 277 932 )

**( 1 x $10^3$ + 3 x $10^2$ + 1x $10^1$ + 1 x $10^0$ ) x ( 2 x $10^2$ + 1 x $10^1$ + 2x $10^0$ ) = 2 x $10^5$ + 7 x $10^4$ + 7 x $10^3$ + 9 x $10^2$ + 3 x $10^1$ + 2 x $10^0$**

Le membre de gauche de l'égalité devient :

**( 1 x $2^3$ + 3 x $2^2$ + 1x $2^1$ + 1 x $2^0$ ) x ( 2 x $2^2$ + 1 x $2^1$ + 2x $2^0$ ) =**

**( 8 + 3 x 4 + 2 + 1) x ( 2 x 4 + 2 + 2 = 23 x 12 = 276**

Le membre de droite de l'égalité devient :

**2 x $2^5$ + 7 x $2^4$ + 7 x $2^3$ + 9 x $2^2$ + 3 x $2^1$ + 2 x $2^0$ =**

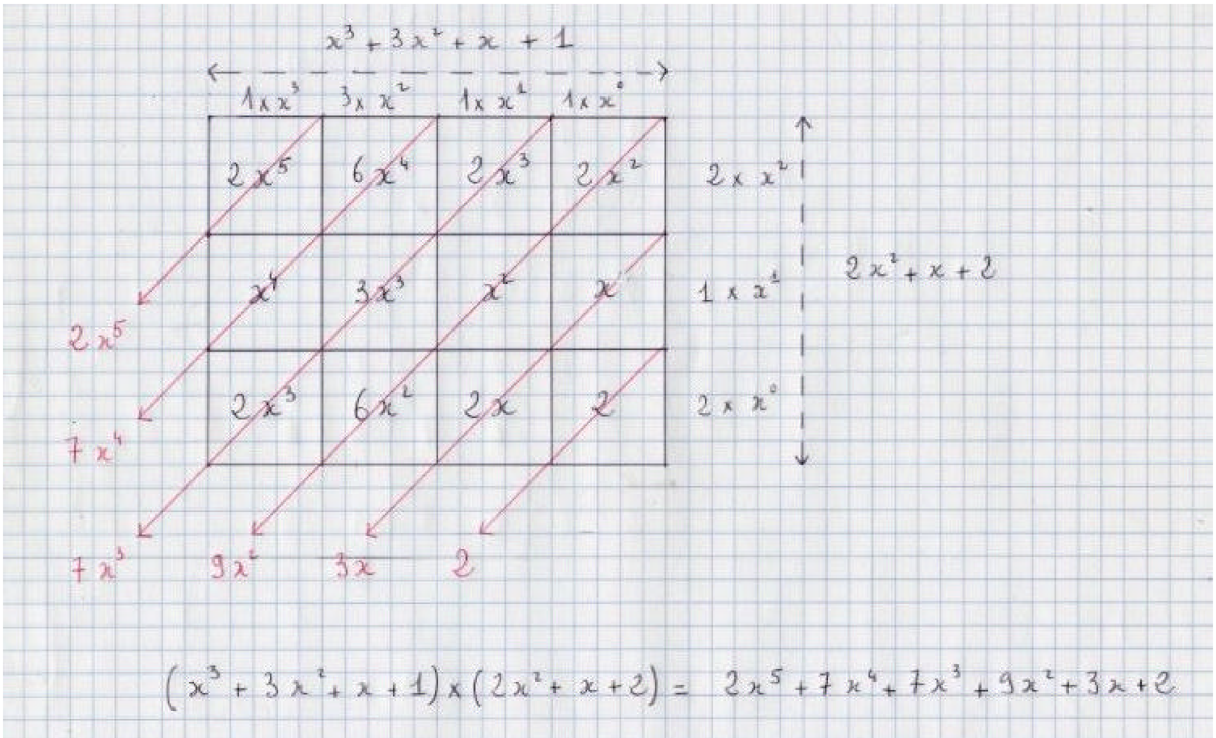
**2 x 32 + 7 x 16 + 7 x 8 + 9x 4 + 3 x 2 + 2 =**

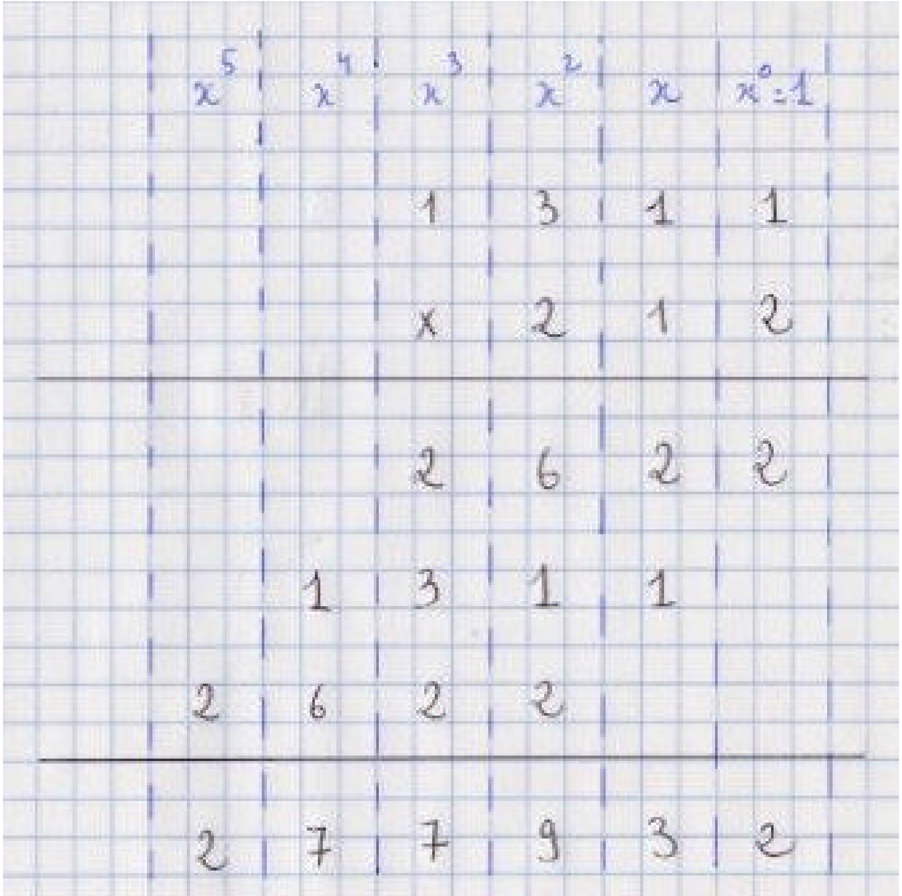
**64 + 112 + 56 + 36 + 6 + 2 = 276**

On a donc également:

**( 1 x $2^3$ + 3 x $2^2$ + 1x $2^1$ + 1 x $2^0$ ) x ( 2 x $2^2$ + 1 x $2^1$ + 2x $2^0$ ) = 2 x $2^5$ + 7 x $2^4$ + 7 x $2^3$ + 9 x $2^2$ + 3 x $2^1$ + 2 x $2^0$**

**On peut donc considérer que l'ensemble des résultats restent valables si l'on remplace 10 par X dans les égalités précédentes, ce qui donne :**






Il reste encore deux étapes pour passer à la multiplication des polynômes :

- il faut expliquer la question des retenues : par simple vérification par le calcul , on montre que l'on ne peut effectuer des retenues que si 10 x $X^n = X^{n+1}$ , c'est-à-dire si X = 10 . Il est intéressant dans ce cas de revenir sur le calcul qui utilise les unités d'aires pour observer comment s'effectue les regroupements lorsque chaque unité utilise deux ordres.

- on peut ensuite introduire l'utilisation des nombres relatifs comme coefficients des monômes.

Ce qui donne une fin de progression qui ressemble donc, dans une première étape à :

:

| | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 0 | −5 | 4 |
| × | | | | 3 | 0 | −7 |
| | | | −14 | 0 | 35 | −28 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 6 | 0 | −15 | 12 | | |
| | 6 | | −29 | 12 | 35 | −28 |

puis à :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $2x^3$ | | $-5x$ | $+4$ |
| × | | | | $3x^2$ | | $-7$ |
| | | | $-14x^3$ | | $+35x$ | $-28$ |
| | $6x^5$ | | $-15x^3$ | $+12x^2$ | | |
| | $6x^5$ | | $-29x^3$ | $+12x^2$ | $+35x$ | $-28$ |

Michel Delord