

Epistémologie, Histoire et Enseignement des Mathématiques¹

"Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête celui qui est enseigné"²

Francisco Sanchez, *Il n'est Science de Rien*

La science n'est pas fabriquée pour être enseignée, elle a ses enjeux propres qui sont, comme le dit l'adage, de comprendre le monde et de le transformer. Dans une société donnée, la science peut alors avoir plus ou moins d'importance, autrement dit la valeur sociale de la science (c'est-à-dire la valeur accordée par la société ou du moins par ceux qui se considèrent, à tort ou à raison, l'élite représentative de cette société) peut être plus ou moins grande et les raisons de cette valeur sociale peuvent être diverses. C'est cette valeur sociale qui conduit à la mise en place d'un enseignement scientifique mettant en valeur certains domaines de la science, ainsi les mathématiques à l'époque des deux grandes réformes de l'enseignement scientifique de ce siècle (les années 1900 et les années 1970³), ainsi, ce qui semble vraisemblable, l'informatique et les sciences connexes au début du prochain siècle; mais c'est aussi cette valeur sociale qui définit les enjeux des domaines de la connaissance enseignés, enjeux de connaissances, mais aussi enjeux idéologiques pour dire les choses de façon générale.

C'est à travers les divers enjeux qui se définissent autour d'un domaine de la science⁴ qu'il faut comprendre d'une part la place effective de l'enseignement de ce domaine, d'autre part les formes de cet enseignement: c'est ainsi que l'on peut comprendre, non seulement la place de l'enseignement des mathématiques dans les réformes du XXème siècle rappelées ci-dessus, mais aussi la façon dont se sont développées les réflexions sur leur enseignement et les pratiques correspondantes, qu'il faut aussi comprendre la place prise par les deux grands courants de réflexions issus des réformes et contre-réformes depuis les années soixante-dix, marquées institutionnellement par les deux groupes HPM⁵ et PME⁶ qui gravitent autour des congrès ICME, qu'il faut enfin comprendre la place des nouveaux instruments de la technique moderne (ce que l'on appelle en France les *nouvelles technologies*) dans l'enseignement des mathématiques⁷.

Cela dit, lorsqu'un domaine de la connaissance est considéré comme devant être enseigné, le problème se pose des conditions de son enseignement. Parmi les problèmes posés par l'enseignement d'un domaine de la connaissance se pose celui de son *appréhension* par qui ne le connaît pas encore⁸, autrement dit des difficultés rencontrées dans cette appréhension, difficultés d'ordre technique et difficultés d'ordre conceptuel.

Si la réflexion sur l'enseignement des mathématiques est ancienne dans la mesure où l'enseignement des mathématiques est ancien, on peut considérer qu'elle s'est renouvelée au XXème siècle avec les deux réformes citées ci-dessus, et plus particulièrement après l'échec de la seconde de ces réformes, celle des *mathématiques modernes*, réforme dont on avait espéré qu'elle permettrait l'accès des mathématiques à tous. On se retrouve aujourd'hui quelque peu démuni lorsque l'on cherche les moyens de rendre enfin cet enseignement accessible au

¹in *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997

²Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

³Pour une étude de ces réformes nous renvoyons au colloque *Réformer l'enseignement scientifique au XXème siècle*, Paris janvier 1994 et à l'ouvrage qui en est issu, *Les Sciences au Lycée*, Vuibert, Paris 1996

⁴Il faudrait, pour être précis, distinguer enjeux "primaires" et "secondaires", ceux qui conduisent à la mise en place d'un domaine de la connaissance et à sa délimitation et ceux qui se définissent au cours du développement du domaine de la connaissance. Mais l'on peut remarquer que, une fois le domaine mis en place, enjeux "primaires" et enjeux "secondaires" se mêlent; si la distinction a un intérêt historique, relié aux raisons qui amènent à définir un domaine particulier de la connaissance, elle tend ensuite à s'effacer devant le développement du domaine de la connaissance en question.

⁵History and Pedagogy of Mathematics

⁶Psychology and Mathematical Education

⁷Nous renvoyons au document "Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century" préparatoire à la rencontre de Catane (septembre 1974), une traduction française est publiée in *Repères-IREM* n°18, janvier 1995. Pour une analyse critique de ce document, cf. Rudolf Bkouche, "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie", *Repères-IREM* n° 26, janvier 1997

⁸Je préfère ici employer le terme *appréhension* au terme *apprentissage*, lequel me semble être devenu, via les diverses tentatives de théorisation, trop restrictif pour le problème que nous posons. J'utiliserai par contre le terme *apprentissage*, débarrassé de ses connotations constructivistes, pour parler de l'activité des élèves placés en situation d'élèves devant appréhender un domaine de la connaissance.

plus grand nombre⁹. Devant cet échec d'un enseignement des mathématiques pour tous, de nombreux travaux se sont efforcés, à travers de multiples approches, de définir des démarches pédagogiques permettant d'assurer, de la meilleure façon possible, cet enseignement des mathématiques pour tous qui apparaît comme un point essentiel de la démocratisation de l'enseignement¹⁰.

Parmi ces approches, nous citerons d'abord la tentative d'une étude *scientifique* des phénomènes d'enseignement qui s'est élaborée autour de la *didactique*, avec comme conséquence la recherche d'une *ingénierie* didactique, travaux dont nous ne parlerons pas ici¹¹.

Je m'intéresserai essentiellement au courant défini par "*une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*", courant qui s'est développé en France autour de la Commission Inter-IREM Epistémologie¹². Ces travaux ont le mérite de mettre l'accent sur les problématiques qui ont conduit, au cours de l'histoire, à développer une activité mathématique, posant ainsi la question de l'apport de la connaissance de l'histoire des mathématiques à la pratique enseignante. Comme souvent dans ce type de travaux, au carrefour de la militance et de la scientificité, un enthousiasme justifié a conduit à un certain état d'esprit de prosélytisme, prosélytisme nécessaire dans la mesure où il a permis à des enseignants de s'intéresser aux aspects historiques de la discipline qu'ils enseignent, c'est-à-dire à la façon dont elle s'est construite et développée jusqu'à son état actuel, mais prosélytisme dangereux lorsqu'il conduit à chercher dans l'histoire des mathématiques et dans la réflexion épistémologique qui l'accompagne les conditions qui devraient enfin permettre de réussir l'enseignement des mathématiques¹³.

La question n'est pas de convaincre les enseignants de mathématiques que l'introduction d'une perspective historique leur apportera le salut; il s'agit plutôt d'explicitier, dans la mesure du possible, les raisons qui peuvent conduire à mener une réflexion d'ordre épistémologique dans le cadre du métier d'enseignant. Qu'une telle réflexion amène à s'intéresser à l'histoire des mathématiques, voire à y chercher les conditions d'un meilleur exercice du métier d'enseignant, nous importe peu ici; ce que nous voulons développer, c'est comment une réflexion d'ordre épistémologique participe de l'exercice même du métier.¹⁴

L'objet de cet article est donc moins de définir *a priori* la part de l'histoire et de l'épistémologie dans l'enseignement que de tenter de cerner les lieux où l'enseignant rencontre, dans le cadre de la pratique de son métier, des problèmes d'ordre épistémologique. C'est dans la mesure où la réflexion d'ordre épistémologique s'inscrit dans les problèmes d'enseignement que celle-ci peut prendre sens dans la pratique du métier; cela ne

⁹Nous ne poserons pas ici la question des raisons qui conduisent à vouloir rendre accessible au plus grand nombre la connaissance des mathématiques, on peut considérer que ces raisons s'appuient d'une part sur l'idéal de démocratisation issu des *Lumières*, d'autre part sur l'*idéologie des mathématiques partout* défendue par les réformateurs des *mathématiques modernes* (cf. Rudolf Bkouché, "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France: de la réforme de 1902 à la réforme des *mathématiques modernes*" in *Les Sciences au Lycée*, o.c.).

¹⁰La question reste posée de la part nécessaire de ces mathématiques pour tous, nous ne l'aborderons pas dans le cadre de cet article.

¹¹Pour une présentation de la didactique, nous renvoyons à l'ouvrage de Samuel Johsua et Jean-Jacques Dupin, *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, Paris 1993 et aux analyses de cet ouvrage dans *Repères-IREM* n°19, avril 1995; pour une analyse critique (partielle) de cette volonté de scientificité, nous renvoyons à Rudolf Bkouché: *La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle*, IREM de Lille, 1993, et "Variations sur nécessité et suffisance" *Repères-IREM* n°18, janvier 1995

¹²Pour une présentation de ce courant, nous renvoyons à l'ouvrage édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM, Lyon 1988. Rappelons que les IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) existent en France depuis 1969 et regroupent des enseignants de tous les ordres d'enseignement (université, lycée et collège, école élémentaire).

¹³Ce danger est souligné par Evelyne Barbin qui explique, dans la préface de l'ouvrage cité ci-dessus, qu'il ne faut pas attendre de cette perspective historique la solution à tous les problèmes d'enseignement.

¹⁴J'insiste sur le fait que je me place ici du point de vue de l'enseignant à l'exclusion de toutes considérations sur les élèves. Celles-ci sont secondes (ce qui ne signifie pas secondaires) dans la mesure où c'est la construction par *celui qui enseigne* de son propre rapport au savoir qu'il enseigne qui conditionne son enseignement et qui peut lui permettre de penser, avec quelque pertinence, le problème de l'apprentissage de sa discipline par les élèves. Il est vrai que l'activité d'enseignement conduit *celui qui enseigne* à transformer son propre rapport au savoir et par cela-même sa façon d'enseigner, mais une telle transformation suppose un socle initial à partir duquel un enseignant peut définir les conditions de son enseignement.

signifie pas qu'un enseignant ne puisse avoir une réflexion épistémologique propre (c'est-à-dire indépendante de tout problème d'enseignement) et c'est l'affaire de chacun de s'y intéresser ou non¹⁵.

Si l'on veut éviter le volontarisme et le prosélytisme dont j'ai parlé ci-dessus, il est nécessaire de pointer, autant que cela se peut, les lieux où l'activité d'enseignement rencontre des questions d'ordre épistémologique. Citons d'abord l'*idéal de simplicité* qui anime toute activité mathématique, sinon toute activité scientifique; on oublie trop que la science s'inscrit dans un idéal de simplicité, que c'est cette simplicité qui constitue la valeur de la science comme l'un des lieux privilégiés de l'intelligibilité du monde, mais que cette simplicité, loin d'être donnée, est une construction lente, un objectif souvent difficile à atteindre, et que, en fin de compte, c'est cette simplicité qui conduit à accepter le prix à payer pour l'atteindre (cf. annexe). On peut aussi citer la *question de la démonstration*, laquelle est au cœur de toute activité mathématique quelque peu consistante¹⁶; on sait combien la démonstration apparaît redoutable aux élèves, ce qui implique de la part des enseignants une réflexion sur la démonstration en tant que telle, réflexion sans laquelle la démonstration risque de n'apparaître que comme le simple usage de quelques règles et procédures définies *a priori* comme nous y invitent aujourd'hui les diverses boîtes à outils, référentiels et autres calembredaines à la mode¹⁷.

Nous revenons sur le rôle que peut jouer la réflexion épistémologique de l'enseignant (ou du futur enseignant) dans l'activité enseignante. Cela pose évidemment la question de la place de l'épistémologie et de l'histoire des sciences dans la formation des maîtres?

Nous distinguerons ici la réflexion épistémologique, en tant qu'elle est *constituante* d'une pensée, et l'épistémologie, en tant que *discours constitué*; c'est la réflexion épistémologique en tant que réflexion sur la constitution du savoir que je mettrai en avant dans la mesure où cette réflexion participe de la réflexion pédagogique, de même que cette dernière s'insère dans une réflexion épistémologique dans la mesure où l'activité d'enseignement, en tant qu'elle participe de la transmission d'un savoir, pose le problème de la relation entre construction du savoir et acquisition du savoir¹⁸. Cela dit, la réflexion épistémologique ne devient consistante que si elle s'appuie sur le discours constitué de l'épistémologie; de même qu'on imagine mal qu'un élève reconstruise de lui-même un savoir déjà constitué (encore que certains courants pédagogistes actuels se complaisent dans une telle conception de l'enseignement), on imagine difficilement une réflexion *spontanée* sur l'activité scientifique; c'est dire que la réflexion épistémologique *personnelle* se construit sur une culture *acquise*, c'est en ce sens que l'on peut demander que la formation des maîtres prenne en charge un enseignement de l'épistémologie et de l'histoire des sciences.

Il nous reste à revenir sur l'épistémologie elle-même; pour cela nous nous plaçons dans une problématique gonséthienne. Prolongeant l'analyse de Gonseth qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance¹⁹, nous distinguerons trois aspects de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques*²⁰.

L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématico-logique et la forme expérimentale (encore faut-il préciser ce que chacune de ces deux formes signifie dans le cadre d'un domaine donné de la connaissance). Nous pouvons distinguer deux grandes formes de cette épistémologie des

¹⁵On peut concevoir cependant que l'intérêt propre pour l'épistémologie et l'histoire de la discipline (curiosité intellectuelle pure indépendante de toute considération d'enseignement) influe sur la pratique du métier, on peut concevoir aussi que les intérêts d'ordre épistémologique ou historique liés à la pratique du métier conduisent à découvrir un intérêt propre pour l'épistémologie. Tout cela nous rappelle le caractère intellectuel du métier d'enseignant, caractère qui nous semble quelque peu oublié aujourd'hui.

¹⁶Sur la question de la démonstration nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin Géométrique, de la main à l'ordinateur*, Actes du colloque Inter-IREM Géométrie (Le Quesnoy, juin 1994), IREM de Lille, 1996, p. 189-232.

¹⁷Nous parlons ici des divers "gadgets" introduits depuis quelques années dans l'enseignement français dans l'espoir que les élèves, à défaut de comprendre les mathématiques, sauront "réussir" quelques exercices fabriqués *ad hoc*.

¹⁸Le discours pédagogique actuel insiste trop souvent sur la place de la construction du savoir au dépens de l'acquisition du savoir, comme si le rôle de l'enseignement se situait moins dans la transmission d'un savoir déjà constitué que dans la possibilité pour l'élève de construire un savoir qui lui serait propre. On ne construit pas du savoir *ex nihilo*, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui *a priori* n'est pas le sien et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien; c'est parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire du savoir. Quelle serait l'autonomie d'une personne qui n'aurait pas *acquis* sa langue maternelle, à laquelle on aurait laissé la *liberté* de construire sa propre langue?

¹⁹Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, Lausanne 1975, préface.

²⁰Ces trois aspects de l'épistémologie seront développés dans un article à venir.

fondements, une forme *métaphysique*, laquelle s'appuie sur une ontologie des objets (que l'on se situe dans une philosophie empiriste où les objets mathématiques sont des *abstractions* issues de la connaissance sensible, ou que l'on adopte un point de vue platonicien), et une forme *analytique*, laquelle s'appuie essentiellement sur une analyse du langage conduisant à expliciter ce que l'on pourrait appeler *la grammaire du raisonnement*, les objets étant définis (ou redéfinis) par un système de relations donné *a priori*. En ce qui concerne les mathématiques, on peut ainsi distinguer entre une *mathématique des objets* fondée sur les vérités premières que sont les axiomes, considérés comme propositions portant sur des objets existants, propositions évidentes par elles-mêmes comme on peut le lire dans les traités classiques de géométrie élémentaire, et une *mathématique des relations* comme se présente la construction hilbertienne²¹. La diversité des modes de raisonnement qui ont constitué dans l'histoire ce que l'on appelle la démonstration et la diversité des conditions de légitimation de ces raisonnements nous amène à prendre en compte la diversité des approches du problème des fondements et en particulier son historicité. L'étude de l'épistémologie des fondements se pose ainsi doublement; d'une part une étude *synchrone* s'intéressant aux principes qui régissent les règles de raisonnement, d'autre part une étude *diachronique* dont l'objet est l'étude des transformations des conditions de légitimation du raisonnement dans l'histoire, ce qui pose le double problème des raisons de ces transformations d'une part et d'autre part des *invariants historiques*²² qui font que l'on reconnaît une unité dans les diverses formes du raisonnement mathématique à travers les âges.

L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leur signification, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel. Il s'agit ici moins de rechercher un discours fondateur que d'expliquer comment des procédures, des modes de raisonnement ou des modes de recherche se sont constitués et comment ils ont été et sont utilisés²³. Ceci nous renvoie encore une fois aux raisons qui conduisent à fabriquer de tels procédures, c'est-à-dire aux problèmes qui en sont à l'origine.

L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, "*la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation*"²⁴, c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mis en place les théories plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique (ou de champs de problèmes²⁵) dans l'étude des conditions de la construction de la science, problèmes de fondements et règles de fonctionnement s'articulant autour des problématiques dans lesquelles ils se situent.

C'est avec l'épistémologie des problématiques que nous reviendrons à l'histoire des mathématiques, dans la mesure où une analyse historique de l'évolution d'un domaine de la connaissance nous permet de mieux appréhender les diverses significations de ce domaine de la connaissance. Pour préciser ce point, il nous semble nécessaire de mettre l'accent sur l'ambiguïté épistémologique de l'histoire des sciences et par cela même sur l'ambiguïté de l'intervention de l'histoire des sciences dans l'enseignement scientifique.

Dans l'introduction des *Fondements de l'Arithmétique*, Frege écrit, à propos de la méthode historique:

*"La méthode historique, qui veut surprendre la genèse des choses et connaître l'essence par la genèse, a sans doute une vaste juridiction; elle a aussi ses limites."*²⁶

Nous ne discuterons pas ici le point de vue de Frege qui oppose, quant aux travaux sur les fondements des mathématiques, méthode logique et méthode historique; nous voulons seulement, nous appuyant sur la

²¹Rudolf Bkouche, "Le projectif ou la fin de l'infini" in *Histoires d'infini*, Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie (Brest 1992), IREM de Brest 1994 et "Axiomatique euclidienne et axiomatique hilbertienne" (à paraître).

²²Pour la notion d'invariant historique, nous renvoyons à la leçon inaugurale de Paul Veyne au Collège de France (Paul Veyne, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976)

²³On pourrait citer le calcul différentiel de Leibniz (cf. G. W. Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989) ou le rôle de l'analytique dans les travaux de Lagrange (cf. Rudolf Bkouche, "Les aventures de la méthode analytique", colloque inter-IREM Epistémologie, Reims, mai 1996).

²⁴Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

²⁵pour reprendre l'heureuse expression du *Groupe d'Enseignement Mathématiques* de Louvain-la-Neuve (G.E.M.) (cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII).

²⁶Gottlob Frege, *Les Fondements de l'Arithmétique* (1884) (traduction et introduction de Claude Imbert), Editions du Seuil, Paris 1969, p. 119

critique de Frege, mettre l'accent sur l'ambiguïté de ce que l'on appelle la méthode historique, ambiguïté que l'on peut situer dans la confusion entre *l'origine des notions* et *l'histoire de leurs découvertes* pour reprendre une distinction proposée par Leibniz²⁷, l'origine renvoyant à un "*ordre naturel des idées*" indépendant de l'esprit humain alors que l'histoire renvoie aux "*accidents*" et "*occasions*" qui permettent les découvertes.

On peut demander à l'histoire de découvrir l'*essence des choses* en retrouvant leur genèse, ce qui suppose une signification première originelle, la compréhension des choses passant nécessairement par les retrouvailles de cette signification première. L'histoire devient ainsi sa propre négation, son objet est moins de comprendre un processus historique en tant que tel que de s'appuyer sur le développement historique pour redécouvrir un sens originel perdu²⁸; en ce qui concerne l'enseignement, la méthode historique serait alors le moyen d'atteindre cette signification première. La méthode historique ainsi conçue repose sur une double illusion, d'une part l'existence d'une signification première assimilée à l'*essence des choses*, d'autre part la nécessité d'atteindre cette signification première pour comprendre les choses que l'on étudie; c'est une telle conception de l'histoire que critique, avec raison, Frege.

On peut aussi chercher dans l'histoire moins une origine illusoire que la compréhension d'un certain type de développement; en ce qui concerne l'histoire des sciences, la question n'est plus celle de la genèse d'une notion, au sens où cette genèse nous donnerait la clé, c'est-à-dire le moyen d'atteindre l'essence de cette notion, elle est celle d'une part des conditions de son émergence lorsque cela est possible²⁹, d'autre part des modes de développement de cette notion, ce qui nous renvoie à l'épistémologie des problématiques. Dans une telle conception, la mise en place d'une perspective historique dans l'enseignement a pour objet moins un enseignement en tant que tel de l'histoire que la problématisation des notions enseignées; que les problématiques sur lesquelles se construit l'enseignement soient alors les problématiques originelles ou non devient alors de peu d'importance.

C'est, bien évidemment, cette seconde conception de l'histoire qui sous-tend cet exposé, la place de l'histoire des sciences dans l'enseignement des sciences se situant essentiellement dans ses implications pédagogiques, autrement dit, dans ce qu'elle permet de comprendre de la science enseignée; c'est en cela que l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement d'une science diffère d'un enseignement de l'histoire de cette science. Cela nous conduit à distinguer, d'une part le rôle de la connaissance historique dans l'élaboration de l'enseignement, lequel relève du métier d'enseignant (ce qui pose la question de la place de l'histoire des sciences dans la formation des maîtres), d'autre part l'intervention effective de l'histoire des sciences dans l'enseignement. La mise en place d'une perspective historique dans l'enseignement n'implique en rien que l'histoire apparaisse en tant que telle dans l'enseignement lui-même, c'est alors au maître que revient la détermination de la part effective d'histoire (cours d'histoire proprement dit, lecture de textes anciens, reconstitution de problèmes dits "historiques"³⁰,...) intervenant dans la classe, ce qui suppose que le maître ait, d'une part la connaissance des aspects historiques de ce qu'il enseigne, d'autre part qu'il ait su porté sur ces aspects historiques un regard épistémologique³¹.

A côté de ces deux conceptions de la place de l'histoire dans l'enseignement, celle que l'on pourrait appeler *hégélienne* et celle de *la perspective historique*, je parlerai d'une troisième conception, celle de l'analogie entre le développement historique des sciences et le développement personnel de la connaissance, entre la

²⁷Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*, Garnier-Flammarion, Paris 1966, livre III, chapitre 1, p. 237.

²⁸Nous rapprocherons cette conception de l'histoire des conceptions de Hegel qui, en cherchant une signification globale de l'histoire, se propose moins de l'étudier dans sa réalité que de la redéfinir afin de la mieux placer dans son cadre supposé. Dans ces conditions, l'*essence des choses* représente moins le développement historique que les conceptions de l'historien, autrement dit, ce qui soutient l'histoire ne relève plus de l'histoire. On peut aussi considérer que les conceptions de l'historien s'inscrivent elles-mêmes dans l'histoire, mais c'est ici un autre problème, moins celui de l'histoire que celui de l'histoire de l'histoire.

²⁹Rappelons que Frege, dans l'ouvrage cité ci-dessus, se propose d'explicitier la notion de nombre entier. On sait que cette notion remonte aux débuts de l'histoire de l'humanité et qu'il ne peut être question de connaître sa genèse autrement que par une reconstruction hypothétique, cette reconstruction s'appuyant sur les conceptions propres de son auteur (cf. note précédente). Si une telle méthode de reconstruction peut avoir son utilité dans le travail de l'historien des sciences, elle est essentiellement d'ordre heuristique.

³⁰moins pour dire que tel problème a été étudié par untel à telle époque, ce qui présente peu d'intérêt, que pour mettre en place, sous une formulation moderne, une problématique significative.

³¹L'expérience de l'enseignement de l'histoire des mathématiques, autant dans les classes que dans la formation des maîtres, nous apprend que l'enseignement de l'histoire d'une science a ses propres difficultés d'appréhension; il s'agit donc moins d'ajouter une discipline de plus à l'enseignement que d'explicitier comment une perspective historique permet, pour qui l'apprend, une meilleure compréhension de la science en question.

phylogenèse et la psychogenèse, pour reprendre une terminologie devenue classique³². Cette conception, que Piaget a développée autour de l'épistémologie génétique, me semble doublement réductrice, sur le plan du développement personnel d'une part, sur le plan de l'histoire collective d'autre part.

L'analogie piagétienne repose sur l'hypothèse de l'existence de structures psychologiques profondes qui régissent, via les mécanismes de l'accommodation et de l'assimilation, l'acte de connaître, constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la *cognition*³³. L'aspect problématique de la construction scientifique est ainsi éliminé, celle-ci se réduisant aux seules interactions entre un sujet connaissant *objectivé* comme ensemble de processus cognitifs et le monde extérieur, l'ensemble des processus cognitifs étant lui-même organisé par la théorie des stades, laquelle rend compte de l'analogie entre la genèse des connaissances chez l'individu et le développement historique de la science³⁴.

Ainsi le sujet connaissant n'existe plus en tant que sujet, du moins de sujet conscient, si l'on considère que le sujet n'est plus qu'un ensemble de processus en interaction avec le milieu dans lequel il baigne. De même l'histoire n'est plus que la description d'un ensemble d'interactions qui ont conduit, plus ou moins nécessairement, à l'état actuel des connaissances, ce qui renvoie à un aspect téléologique que l'on pourrait situer à l'intersection de Hegel et de Darwin. En ce sens, l'épistémologie génétique élimine le sujet, autant le sujet individuel que le sujet collectif, mais c'est peut-être le prix à payer pour amener l'épistémologie à la scientificité.

C'est ce souci de scientificité qui amène Piaget à écrire dans la préface de son *Introduction à l'épistémologie génétique*:

*"Il y a longtemps déjà que la psychologie expérimentale, la sociologie et la logistique, ou logique algébrique, pour ne parler que des disciplines qui ont fourni le plus de travaux collectifs, se sont constituées à titre de sciences distinctes, indépendantes des discussions d'ensemble de la philosophie. Nous voudrions examiner à quelles conditions il pourrait en être ainsi de l'épistémologie génétique, ou théorie de la connaissance scientifique fondée sur l'analyse du développement même de cette connaissance. Il s'agit donc de chercher s'il est possible d'isoler l'objet d'une telle discipline et de constituer des méthodes spécifiques, propres à trouver la solution de ses problèmes particuliers."*³⁵

et préciser quelques lignes plus loin comment se différencie philosophie et science, la première se donnant pour objet *"la totalité du réel, de la réalité extérieure comme de l'esprit et des relations entre eux"* tandis que la seconde *"se donne au contraire un objet limité"*, ne devenant discipline scientifique *"qu'avec la réussite d'une telle délimitation"*.

Piaget oppose alors les *"divergences inévitables"* entre les diverses philosophies et *"l'accord relatif des esprits"* atteint par une science, mais, précise-t-il, *"c'est dans la mesure où elle ne sollicite cet accord que pour la solution de problèmes restreints et dans l'emploi de méthodes également bien définies"*.

L'épistémologie génétique, constituée comme approche scientifique de la connaissance, doit donc délimiter les objets qu'elle étudie si elle veut aborder, autrement que par la seule spéculation philosophique, le problème fondamental des rapports du sujet connaissant avec les objets qu'il est amené à connaître; elle est ainsi amenée *"pour expliciter comment le sujet est affecté par l'objet"* à *"poser ce sujet et cet objet réunis à titre d'objet de sa propre recherche"*, le nouveau sujet connaissant étant alors le théoricien de la connaissance³⁶. C'est cela qui conduira Piaget à élaborer ce que l'on appellerait aujourd'hui un "modèle" de sujet connaissant, l'ensemble de processus cognitifs dont nous avons déjà parlé. La théorie des stades, en rendant compte aussi bien du développement collectif que du développement individuel, légitime ainsi l'analogie entre le développement historique de la science et la genèse de la construction des connaissances chez l'individu, analogie que Piaget développe tout au long de son oeuvre, quitte à la remettre en question lorsque besoin est, nous le verrons à propos de la géométrie.

En ce qui concerne les mathématiques, cette analogie se réclame de la rencontre entre la psychologie piagétienne et la pensée mathématique contemporaine comme on peut le lire dans les articles de Piaget et de Dieudonné dans l'un des premiers ouvrages où se dessine une réflexion sur la réforme des *mathématiques*

³²Jean Piaget et Roland Garcia, *Psychogenèse et Histoire des Sciences*, Flammarion, Paris 1983

³³sur les notions d'accommodation et d'assimilation, nous renvoyons à l'article de Piaget, "La psychogenèse des connaissances et sa signification épistémologique" in *Théories du langage, Théories de l'apprentissage, Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*, organisé et recueilli par Massimo Piatelli-Pamarini, Editions du Seuil, Paris 1979, p. 53-64

³⁴Jean Piaget, *L'épistémologie génétique*, "Que sais-je?", PUF, Paris 1970

³⁵Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique* (2 tomes), PUF, Paris 1950; réédition 1973, tome 1, p. 13

³⁶Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, o.c. tome 1, p. 45

modernes³⁷; elle a conduit Piaget à identifier ce qu'il considère comme les structures profondes de la connaissance mathématique (lesquelles relèveraient selon Piaget de la psychologie) avec les structures-mères de Bourbaki (structures d'ordre, structures algébriques, structures topologiques) telles qu'elles ont définies dans son article-programme "L'architecture des sciences mathématiques"³⁸. Une telle identification impliquait une harmonie entre le développement des mathématiques contemporaines et l'apprentissage des mathématiques, la construction bourbakienne apparaissant moins comme un moment de l'histoire des mathématiques que comme le mode de construction de la pensée mathématique; l'apprentissage des mathématiques passait ainsi par les structures-mères dont Bourbaki avait expliqué, dans l'article cité ci-dessus, comment elle fondaient les mathématiques.

S'appuyant sur l'analogie supposée entre les structures de la pensée telle qu'elle se construisent chez l'enfant et les structures-mères de Bourbaki (cf. ci-dessus), Piaget explique alors la construction de la connaissance géométrique chez l'enfant d'un point de vue structural: les structures topologiques précèdent les structures projectives, lesquelles précèdent les structures métriques; la connaissance géométrique se construit ainsi selon un schéma correspondant au *Programme d'Erlangen*. Les mathématiques contemporaines en adoptant le point de vue structural ont ainsi retrouvé l'ordre "*naturel*" de la construction de la connaissance, contrairement à l'ordre historique qui s'est d'abord appuyé, avec la géométrie grecque, sur les relations métriques, le projectif venant en second et le topologique en dernier lieu seulement. Piaget explique ainsi ce renversement:

*"Si, historiquement, ces éléments semblent donnés antérieurement à la découverte de la structure, et si cette dernière joue ainsi essentiellement le rôle d'un instrument réflexif destiné à dégager leurs caractères les plus généraux, il ne faut pas oublier que, psychologiquement, l'ordre de la prise de conscience renverse celui de la genèse: ce qui est premier dans l'ordre de la construction apparaît en dernier à l'analyse réflexive, parce que le sujet prend conscience des résultats de la construction mentale avant d'en atteindre les mécanismes intimes."*³⁹

ce qui semble pour le moins peu convaincant.

Il faut alors revenir à une conception problématique de l'histoire des sciences. La géométrie s'est construite autour de la mesure des grandeurs, géométrie pratique qui relève de la métrologie mais aussi géométrie rationnelle lorsqu'elle se propose de déterminer, par le seul raisonnement, les propriétés de ces grandeurs à partir de quelques unes d'entre elles considérées comme vérités premières; c'est le principe de l'axiomatique euclidienne et l'on sait que les *Eléments* d'Euclide ont constitué et constituent encore, pour les héritiers de la pensée grecque, le modèle de toute activité scientifique, voire de toute activité qui se veut fondée en raison⁴⁰. Les propriétés topologiques restent implicites, peut-être à cause de leur évidence intuitive et il faudra attendre le XVIII^e siècle pour qu'elles posent problème. Quant aux notions projectives, elles prennent naissance autour des pratiques perspectivistes; c'est la nécessité de mettre en ordre ces pratiques (et l'ordre ici est d'abord l'ordre euclidien) qui conduit les géomètres à mettre en avant ce que l'on appelle aujourd'hui les propriétés projectives.

C'est cet aspect problématique que Piaget ignore dans son identification des structures psychologiques et des structures mathématiques; il peut ainsi reconstruire l'histoire en fonction des nécessités internes de l'épistémologie génétique en même temps qu'il explicite une théorie psychologique de la connaissance qui s'adapte à cette histoire reconstruite. On pourrait dire que c'est l'état de la connaissance mathématique contemporaine qui le force à construire une histoire et une psychologie compatible avec cet état, comme si cet état avait besoin d'être légitimé par des considérations psychologiques ou épistémologiques⁴¹. Ainsi le point de vue structural se

³⁷Jean Piaget et al, *L'Enseignement des mathématiques*, publié par la CIEAEM (Commission Inter-nationale pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955, chapitre premier, "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence" par Jean Piaget, chapitre III, "L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre" par Jean Dieudonné.

³⁸Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, Paris 1948; réédition Blanchard, Paris 1962

³⁹Jean Piaget et al, *L'Enseignement des mathématiques*, op. cit. p. 14

⁴⁰L'exemple canonique étant l'*Ethique* de Spinoza.

⁴¹Peut-être faut-il rappeler ce truisme qui nous dit qu'un domaine de la connaissance n'a pas besoin de telles légitimations pour se développer et que le rôle de l'épistémologie est essentiellement de comprendre comment un domaine de la connaissance se développe et comment il construit les conditions de sa légitimation; mais la compréhension se situe ici moins dans la définition de causes ou de lois (au sens des sciences positives) que dans la recherche de raisons (sur la distinction entre causes et raisons, cf. Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, Gallimard, Paris 1996).

développe sur une unification qui se propose de fonder à la fois les mathématiques et la connaissance des mathématiques.

Une telle unification pose cependant un problème; si les structures mathématiques sont la marque de structures cognitives profondes, comment la tentative d'explication psychologique de la connaissance mathématique peut-elle éviter la circularité de la psychologie lorsque celle-ci s'appuie sur les mathématiques. Loin de rejeter une telle circularité, Piaget la prend en charge comme participant de l'édifice qu'il construit, distinguant seulement, chez le sujet connaissant, entre une prise de conscience naïve qui ignore les structures profondes mises en jeu et une analyse réflexive qui permet au sujet d'explicitier ces structures profondes; c'est ainsi qu'il écrit⁴²:

"Les mathématiques reposent sur un ensemble d'opérations constitutives, dont la conscience naïve prend simplement acte, tandis que la réflexion critique, dite "théorie du fondement des mathématiques" en poursuit systématiquement l'analyse."

Ce n'est pas ici le lieu d'une étude approfondie du cercle piagétien, cercle incontournable dans toute tentative d'explication de la construction de la connaissance par le sujet connaissant et qui marque les limites de la scientificité d'une telle tentative⁴³.

La position piagétienne pose alors une double question.

La première question est celle des limites de l'identification des structures cognitives profondes (si elles existent) et des structures mises en place par un domaine de la science au cours de son développement. Quel est le lien, par exemple, entre les notions topologiques de la connaissance naïve et les structures topologiques des mathématiques contemporaines? question que l'on peut préciser de la façon suivante: dans quelle mesure les notions naïves sont-elles constitutives des constructions structurales et dans quelle mesure les constructions structurales, une fois construites, intègrent-elles les notions naïves?

La seconde question se situe à l'intérieur même de la psychologie; dans quelle mesure les structures mises en place par la psychologie cognitive ont-elles une réalité chez le sujet connaissant. Il y aurait ici à distinguer le sujet cognitif, construction conceptuelle de la psychologie, et le sujet connaissant, celui qui construit sa connaissance; le premier problème des théories cognitivistes est alors celui de l'adéquation (de l'idonéité, dirait Gonsseth) du sujet cognitif comme *modèle* (au sens technique du terme) du sujet connaissant⁴⁴.

Il semble ici que les conceptions de Piaget, enthousiasmé par sa rencontre avec les mathématiciens⁴⁵, relève d'un malentendu sur la notion de structure, malentendu qu'il faudrait replacer, du point de vue de l'histoire des idées, dans l'histoire des courants structuralistes du milieu de ce siècle. En fait, le point de vue piagétien subordonne les aspects problématiques de la connaissance (au sens que nous avons dit ci-dessus) à la conception structurale, laquelle se propose, par souci de cohérence et de simplicité, la reconstruction de la connaissance; en ce sens les conceptions piagésiennes nous renvoient à une ontologie (au sens métaphysique du terme) des structures, position paradoxale pour qui se proposait de construire une épistémologie positive⁴⁶. Comment peut-on comprendre, du point de vue de Piaget, la distinction signalée ci-dessus, entre une mathématique des objets et une mathématique des relations, si ce n'est en recourant à une conception téléologique de l'histoire, banale il est vrai, la rigueur hilbertienne rectifiant les fameuses lacunes d'Euclide et le point de vue structural apparaissant comme un aboutissement nécessaire de la connaissance mathématique. Les enjeux mathématiques qui ont conduit Hilbert à mettre en place les méthodes formalistes se réduiraient donc à la seule nécessité d'atteindre la vérité structurale et de réconcilier enfin les mathématiques et la psychologie; c'est faire bien peu de cas des problèmes auxquels se sont confrontés les mathématiciens et de l'invention qu'ils ont manifestée pour les résoudre.

⁴²Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, o.c. tome 1, p. 47

⁴³La reconnaissance de telles limites est loin d'être acceptée comme le montrent, d'abord l'épistémologie génétique, ensuite le développement récent des sciences cognitives; mais peut-être est-ce là la marque d'un point de vue naïf incapable de sortir de l'opposition métaphysique/sciences positives telle qu'elle a été codifiée par le positivisme.

⁴⁴Sur la distinction entre sujet cognitif et sujet connaissant nous renvoyons à notre article cité "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie".

⁴⁵Jean Piaget et al, *L'Enseignement des mathématiques*, op. cit.

⁴⁶Jean Piaget, *Sagesse et illusions de la philosophie*, PUF, Paris 1965, réédité en 1992. Piaget s'y oppose, non sans raison, à certaines prétentions "suprascientifiques" de la philosophie, mais cette critique nécessaire (même si elle est souvent injuste) de la philosophie s'accompagne en contrepoint d'une défense de la science (en particulier des sciences humaines) qui relève plus de la foi rationaliste de son auteur que de l'argumentation rationnelle.

Le problème posé ici n'est autre que celui du lien complexe entre l'épistémologie, considérée comme un chapitre de la philosophie, et la psychologie cognitive; il me semble que l'explicitation d'un tel lien, pour se construire en dehors des confusions (telle celle de Piaget) ou des anathèmes (telle les positions du psychologisme et de l'antipsychologisme⁴⁷), doit commencer par une analyse de la distinction entre cognition et connaissance.

A partir des trois conceptions de l'intervention de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, nous avons voulu ici mettre en avant ce que l'on pourrait considérer comme les perversions d'une telle intervention, parmi lesquelles l'introduction d'une nouvelle discipline, l'histoire des mathématiques, qui poserait autant de problèmes que les mathématiques⁴⁸. En particulier, à travers la critique de Piaget, nous avons voulu poser, non seulement la question de la pertinence d'une analogie entre le développement de l'histoire et la genèse des connaissances chez l'individu, mais aussi poser le problème de la tendance à la psychologisation des problèmes d'enseignement.

La réflexion sur l'enseignement d'un domaine de la connaissance participe essentiellement de l'épistémologie de ce domaine, mais lorsque nous disons épistémologie, nous pensons plus à la réflexion philosophique qu'à la fabrication d'une nouvelle science positive. L'épistémologie ne peut être une science au sens que son objet d'étude est la science en tant que construction de l'esprit humain, d'un esprit humain qui, parce qu'il est sujet conscient et qu'il agit en fonction de finalités qu'il s'est fixées, individuellement ou collectivement, ne peut être réduit à l'état d'objet de connaissance observé par un sujet, lequel ne pourrait être qu'un super-sujet épistémologue appelé, lui aussi, à devenir un objet de connaissance pour le super-super-sujet mettant en place une épistémologie du second ordre et ainsi de suite; c'est là le paradoxe de toute théorie cognitiviste qui se veut scientifique. En ce sens, s'il y a une réflexion didactique, cette réflexion est d'ordre philosophique avant que de participer de la science positive, si l'on considère que l'élève est un sujet et que l'acte d'enseignement est une relation entre sujets, le sujet maître et le sujet élève, relation qui se construit autour d'un savoir, le rôle du maître étant de transmettre ce savoir à l'élève, le rôle de l'élève étant de prendre ce savoir au maître, la finalité de cette relation étant d'amener l'élève à ne plus dépendre du maître. S'il y a quelque objectivité dans l'enseignement, elle se définit autour du savoir.

Autant dire que le rôle d'une intervention de l'histoire d'une science dans l'enseignement de cette science reste essentiellement de mettre en valeur les enjeux de la construction de la connaissance; c'est en ce qu'elle s'appuie sur une réflexion d'ordre épistémologique qu'elle peut permettre de donner à *ceux qui sont enseignés* (pour reprendre l'expression de Sanchez citée en exergue) les moyens de comprendre *la force de ce qui leur est enseigné*.

⁴⁷Pascal Engel, *Philosophie et psychologie*, o.c.

⁴⁸Veloso demandait non sans humour lors de l'Université d'Été de Montpellier (juillet 1993) quelle discipline nouvelle il faudrait introduire dans l'enseignement, lorsqu'après avoir introduit l'histoire des mathématiques pour faciliter l'apprentissage des mathématiques, il faudra prendre en charge les difficultés posées par l'enseignement de l'histoire des mathématiques.

Annexe : De l'idéal de simplicité dans les sciences

*"It seems to me to be one of the chief objects of mathematical instruction to develop the faculty of perceiving this simplicity and harmony, which we cannot fail to observe in the theoretical physics of the present day."*⁴⁹

Hermann Weyl

Dans un ouvrage de réflexion sur l'activité scientifique, Emile Picard écrivait:

*"On doit d'ailleurs reconnaître qu'il est indispensable, pour le progrès de la science, que les choses paraissent simples"*⁵⁰

Notons d'abord que Picard ne dit pas que les choses sont simples, mais demande qu'elles paraissent simples. Cette exigence marque ainsi moins une propriété du monde que la volonté de l'esprit humain de construire la simplicité du monde. Et faut-il rappeler que les mathématiques sont l'un des lieux privilégiés où se construit la simplicité du monde?

Exigence fondatrice de la pensée scientifique, cet idéal de simplicité ne saurait être ignoré de cette initiation à la pensée scientifique que constitue l'enseignement des sciences⁵¹. C'est cet idéal de simplicité qui permet de comprendre les raisons des sophistications nécessaires élaborées tout au long de l'histoire des sciences, sophistications dont le premier objectif reste de rendre plus aisé, à l'intérieur d'un domaine de la connaissance, autant les instruments techniques pour résoudre les problèmes que l'on y rencontre que les constructions conceptuelles qui permettent une appréhension globale de ce domaine de la connaissance.

J'aimerais citer un ouvrage d'enseignement élémentaire expliquant à de jeunes élèves les *raisons* du calcul littéral:

*"la résolution d'un problème est souvent facilitée lorsqu'on représente par des lettres les nombres inconnus qui interviennent dans ce problème."*⁵²

précisant ensuite:

"On peut raisonner sur ces lettres comme s'il s'agissait de nombres inconnus."

Il s'agit moins ici de développer le calcul littéral, ce qui n'aurait aucun sens à ce niveau, que de montrer comment l'introduction de lettres pour désigner les inconnues conduit à la *mise en équation* d'un problème et à la résolution d'une équation, et comment cette *résolution algébrique*, comme on disait alors, simplifie la résolution du problème. C'est cette simplification de la résolution des problèmes qui conduit à prendre conscience de l'intérêt du calcul littéral et des raisons de le développer, les polynômes et la théorie des équations viendront après.

On peut rapprocher les assertions de Lebossé et Hémary de celle de Descartes ouvrant la *Géométrie*:

*"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."*⁵³

La méthode cartésienne consiste alors, d'abord à restreindre le champ des longueurs à déterminer aux seules longueurs de droites parallèles aux directions de coordonnées, ensuite écrire, en utilisant le calcul de

⁴⁹Hermann Weyl, *Space, Time, Matter* (1918) (translated from the German by Henry L. Brose), Dover Publications, New York 1952, p. 23

⁵⁰Emile Picard, *La Science Moderne*, Flammarion, Paris 1914, p. 68

⁵¹Est-ce un simple truisme que de rappeler que l'enseignement des sciences participe de l'initiation à la pensée scientifique? Les idéologies pédagogistes d'aujourd'hui, que ce soit celle de la pédagogie centrée sur l'apprenant ou celle, à prétentions plus savantes, de la transposition didactique, nous rappellent que ce que ce qui nous semble un truisme ne "va plus de soi" (cf. Rudolf Bkouche, *La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle*, o. c.).

⁵²Lebossé et Hémary, *Arithmétique, Algèbre et Géométrie* (classe de cinquième des lycées et collèges), Fernand Nathan, Paris 1948, p. 91

⁵³René Descartes, *Discours de la Méthode, plus La Dioptrique, les Météores et la Géométrie* (1637), Fayard, Paris 1986, p. 333

Viète⁵⁴, les équations auxquelles satisfont les longueurs inconnues cherchées et à résoudre les équations correspondantes. On voit ainsi comment le calcul permet de résoudre aisément les problèmes dès lors que l'on sait les réduire au calcul. Le calcul littéral, qui permet de calculer indifféremment sur les quantités connues ou inconnues⁵⁵, conduit alors, par la seule utilisation des règles de calcul, à la résolution du problème posé. Nous ne nous étendons pas ici sur la méthode de la géométrie analytique, nous voulions seulement dire comment elle participe de cet idéal de simplicité dont nous avons parlé ci-dessus.

La méthode (au sens cartésien du terme) n'est alors que l'instrument de cette construction de la simplicité.

On retrouve ce même idéal de simplicité dans l'autre grande méthode contemporaine définie par Desargues⁵⁶, la méthode arguésienne qui unifie, sur le plan de la représentation et sur le plan du langage, le théorie des coniques, méthode qui conduira au développement de la géométrie projective.

Ainsi les deux méthodes géométriques, l'analytique et la synthétique, celle du calcul et celle des figures, marquent essentiellement un effort de simplicité (au sens de la construction du simple)⁵⁷; c'est ainsi qu'il faut comprendre le mode d'unification géométrique que chacune d'elles propose aux géomètres, d'autant plus que le dépassement de l'opposition entre les deux méthodes se fera par une "simplicité" encore plus grande, laquelle conduira aux synthèses modernes de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes.

C'est encore cet idéal de simplicité que l'on retrouve dans le point de vue structural développé par Bourbaki⁵⁸ et dans la tentative de modernisation de l'enseignement des mathématiques proposée par la réforme de 1970.

Pourtant l'échec de la réforme de 1970 dans sa volonté de construire un enseignement des mathématiques pour tous pose un problème quant à la signification de cette simplicité: de quelle simplicité s'agit-il? et dans quelle mesure les discours sur la simplicité des mathématiques sont-ils pertinents, en particulier en ce qui concerne l'enseignement?

Lorsque Bourbaki explique, dans le mode d'emploi⁵⁹ de ses *Eléments de Mathématiques*:

"Le traité prend les mathématiques à leur début..."

il s'empresse de préciser:

"Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université."

rappelant ainsi que l'ouvrage n'est pas un ouvrage d'enseignement et qu'il ne s'adresse pas au débutant.

C'est que la simplicité des constructions structurales ne peut être perçue que dans une compréhension globale des mathématiques.

Ainsi la définition d'un groupe, aussi simple soit-elle dans sa formulation (et d'une certaine façon elle est trop simple), non seulement n'épuise pas la richesse de la notion, mais risque d'occulter, pour le lecteur non averti, ce qui fait l'intérêt de cette notion en réduisant celle-ci à sa seule définition et à ses premières propriétés. Autant dire que ce qui importe ici, c'est moins la *simplicité* en tant que telle que la *construction du simple* que constitue la mise en place d'un concept (ici le concept de groupe) par rapport aux problèmes dans lequel il intervient; la notion de groupe n'est pas née d'une définition formelle s'insérant dans le cadre d'une algèbre structurée telle que l'expose l'ouvrage de Bourbaki, mais de son usage dans l'étude de problèmes spécifiques, tels celui de la résolution des équations algébriques avec le point de vue galoisien, ou celui de l'étude des transformations géométriques avec le point de vue du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein.

On voit apparaître ici le lien entre cette construction du simple et l'épistémologie des problématiques dont nous avons parlé ci-dessus.

⁵⁴François Viète, "Introduction à l'Art Analytique" (traduction française par Vauléard) in Vauléard, *La Nouvelle Algèbre de M. Viète* (1630), Fayard, Paris 1986

⁵⁵Rappelons que l'apport de Viète a été de représenter les quantités connues (les coefficients des équations) par des lettres, donnant ainsi toute sa signification au calcul littéral.

⁵⁶Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.

⁵⁷C'est ainsi que l'on peut comprendre le discours sur la généralité nécessaire des méthodes géométriques développé par Chasles dans *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1937, réédition Gabay, Paris 1989).

⁵⁸Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les Grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), Cahiers du Sud, 1948; nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962

⁵⁹Ce mode d'emploi accompagnait les premiers fascicules publiés par Bourbaki.

Du point de vue de l'enseignement, cela nous rappelle que le simple n'est pas donné, qu'il est au contraire l'un des objectifs de l'enseignement, peut-être l'un des objectifs les plus difficiles.

Pour revenir à la notion de groupe, rien ne semble plus facile que d'en donner la définition et d'en montrer quelques propriétés élémentaires, puis, par souci de *concret* (comme on aime à dire!), d'exhiber quelques groupes parmi les contenus enseignés pour en montrer l'intérêt? En quoi cela permet-il de comprendre la richesse du concept de groupe, en quoi cela permet-il de comprendre cette simplicité dont nous avons parlé ci-dessus? Notons que la démarche opposée qui consiste à exhiber d'abord quelques *situations concrètes* pour justifier la définition formelle n'est pas plus adéquate.

Le problème n'est pas de répondre à cette difficile question de la simplicité, avec le risque de retomber dans les illusions de la réforme des mathématiques modernes (ce que j'ai appelé par ailleurs l'illusion langagière⁶⁰). C'est justement le rôle d'une réflexion épistémologique sur la signification de la simplicité dans la science qui peut permettre à *celui qui enseigne* de prendre en compte dans son enseignement la construction de cette simplicité et d'amener *ceux qui sont enseignés*⁶¹ à comprendre le sens de cette simplicité, à comprendre combien la construction de cette simplicité est difficile, mais à comprendre aussi pourquoi cela vaut la peine de prendre en charge une telle difficulté.

⁶⁰Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o. c. chapitre 1; Rudolf Bkouche, *La formation des maîtres: professionnalisation ou formation professionnelle*, o. c.

⁶¹pour reprendre une expression de Francisco Sanchez dans l'heureuse traduction de Andrée Camparot (cf. Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984, p. 167)

Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science⁶²

Introduction

La notion de perspective historique⁶³ n'est pas facile à cerner. Elle est marquée par une double ambiguïté, d'une part la trop fréquente confusion entre l'enseignement et la classe, d'autre part une interprétation trop réductrice de l'apport de l'histoire d'une science dans l'enseignement, l'histoire présentée comme une motivation, une façon différente d'enseigner ou une entrée en matière, toutes formes d'interventions qui relèvent plus souvent de la pensée magique que d'une réelle mise en perspective historique.

C'est donc sur ces deux points que nous nous proposons d'intervenir, deux points que nous considérons comme liés dans la mesure où ils mettent tous deux l'accent sur le rôle du professeur.

Un certain angélisme⁶⁴ met l'accent sur l'élève au dépens de ce qui reste la raison d'être de la classe: transmettre un savoir, c'est-à-dire amener l'élève à posséder la maîtrise de ce savoir.

Si, comme le dit Sanchez, "*ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête ceux qui sont enseignés*"⁶⁵, l'une des tâches de *celui qui enseigne* est d'amener *ceux qui sont enseignés* à prendre conscience de cette force. C'est en ce sens que la perspective historique peut s'inscrire, moins comme motivation (la perspective historique oscillerait alors entre *l'agit-prop* et la promotion, au sens publicitaire du terme) que comme mise en place d'une *problématisation*, point que nous développons ci-dessous.

En ce sens, l'intervention d'une perspective historique ne saurait être un simple ajout à l'enseignement; elle doit s'intégrer à l'enseignement, qu'elle apparaisse explicitement dans la classe ou non; en cela elle est d'abord l'affaire des professeurs.

1- et si on parlait des professeurs

Nous avons dit ci-dessus qu'il fallait distinguer l'enseignement d'une discipline et la classe; pour préciser cette distinction, nous la replacerons dans le cadre du triptyque qui régit l'acte d'enseignement, triptyque constitué par ce que l'on peut appeler les trois moments de l'activité d'enseignement, celui de la discipline, celui de l'enseignement de la discipline et celui de la classe⁶⁶. Ce triptyque concerne essentiellement l'activité du maître, mais c'est la prise en compte de ces trois moments et la réflexion sur l'articulation entre ceux qui permet d'avoir prise sur l'enseignement. Cela met au second plan les théories de l'apprentissage, la question du "comment l'élève apprend", pour mettre en avant la problématisation du savoir que l'on enseigne, problématisation sur laquelle nous reviendrons dans la suite.

On a beaucoup parlé du rapport au savoir, ce rapport intime qu'entretient avec un domaine de la connaissance celui qui s'intéresse à ce domaine, sa façon de le penser qui n'appartient qu'à lui et qui lui permet de se retrouver dans les arcanes de ce domaine⁶⁷. On peut alors considérer que le rôle du maître est d'amener l'élève à construire son propre rapport au savoir qu'on lui enseigne, et non construire son propre savoir comme le clame la vulgate constructiviste, mais cela suppose que le maître soit conscient de son propre rapport au savoir; si la construction du rapport au savoir de l'élève est fonction du rapport au savoir du maître (que l'élève le reprenne à son compte ou s'en écarte, voire en conteste la forme), ce dernier joue un rôle essentiel dans l'acte d'enseignement. C'est donc essentiellement du rapport au savoir du maître que nous parlerons, si l'on considère que la maîtrise de la discipline qu'il enseigne est une condition nécessaire (jamais suffisante il est vrai, mais quelles sont les conditions suffisantes en la matière?) de l'acte d'enseignement. C'est la pleine conscience de ce

⁶²à paraître in *Repères-IREM*, n° 39, avril 2000

⁶³Ce texte se situe dans la continuité de mon intervention à Braga (juillet 1996) (Rudolf Bkouche, "Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997)

⁶⁴au carrefour d'une conception moralisante (l'élève au centre du système éducatif) et d'une conception scientifique marquée par les théories d'apprentissage et la didactique (Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *Repères-IREM* n°9 octobre 1992). Cette centralité de l'élève a pour conséquence, sinon de diminuer l'importance des disciplines, du moins de les redéfinir en fonction de l'enseignement (ce que l'on appelle la *transposition didactique*).

⁶⁵Francisco Sanchez, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

⁶⁶Ce triptyque présente l'avantage sur le classique triangle didactique (le savoir, le maître, l'élève) de mettre en valeur la place centrale du savoir dans l'acte d'enseignement.

⁶⁷Bernard Charlot, *Du Rapport au Savoir*, Anthropos, Paris 1997

rapport au savoir qui peut permettre au maître de pointer les difficultés de la discipline et de penser les difficultés rencontrées par les élèves, la pratique de la classe lui permettant, en fonction de ses propres conceptions sur la discipline, de reprendre constamment une réflexion qui n'est jamais terminée.

C'est donc le rapport au savoir du maître qui peut lui permettre de penser cette articulation entre les enjeux du savoir qu'il enseigne, les enjeux propres à l'enseignement de ce savoir (enjeux épistémologiques, ceux qui sont proprement liés à la connaissance de ce domaine, mais aussi enjeux institutionnels) et les difficultés rencontrées dans la classe (difficulté des élèves confrontés à un domaine de la connaissance, mais aussi difficulté du maître devant les difficultés des élèves).

2- la question de la problématisation

Nous reviendrons d'abord sur les trois moments de l'épistémologie⁶⁸.

Prolongeant l'analyse de Gonsseth qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance⁶⁹, nous distinguerons trois moments de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques*⁷⁰.

L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématico-logique et la forme expérimentale (encore faut-il préciser ce que chacune de ces deux formes signifie dans le cadre d'un domaine donné de la connaissance). Nous pouvons distinguer deux grandes formes de cette épistémologie des fondements, une forme *métaphysique*, laquelle s'appuie sur une ontologie des objets (que l'on se situe dans une philosophie empiriste où les objets mathématiques sont des *abstractions* issues de la connaissance sensible, ou que l'on adopte un point de vue platonicien), et une forme *analytique*, laquelle s'appuie essentiellement sur une analyse du langage conduisant à expliciter ce que l'on pourrait appeler *la grammaire du raisonnement*, les objets étant définis (ou redéfinis) par un système de relations donné *a priori*. En ce qui concerne les mathématiques, on peut ainsi distinguer entre une *mathématique des objets* fondée sur les vérités premières que sont les axiomes, considérés comme propositions portant sur des objets existants, propositions évidentes par elles-mêmes comme on peut le lire dans les traités classiques de géométrie élémentaire, et une *mathématique des relations* comme se présente la construction hilbertienne. La diversité des modes de raisonnement qui ont constitué dans l'histoire ce que l'on appelle la démonstration et la diversité des conditions de légitimation de ces raisonnements nous amène à prendre en compte la diversité des approches du problème des fondements et en particulier son historicité. L'étude de l'épistémologie des fondements se pose ainsi doublement; d'une part une étude *synchronique* s'intéressant aux principes qui régissent les règles de raisonnement à une époque donnée, d'autre part une étude *diachronique* dont l'objet est l'étude des transformations des conditions de légitimation du raisonnement dans l'histoire, ce qui pose le double problème des raisons de ces transformations d'une part et d'autre part des *invariants historiques*⁷¹ qui font que l'on reconnaît une unité dans les diverses formes du raisonnement mathématique à travers les âges.

L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leurs significations, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel. Il s'agit ici moins de rechercher un discours fondateur que d'expliciter comment des procédures, des modes de raisonnement ou des modes de recherche se sont constitués et comment ils ont été et sont utilisés⁷². Ceci nous renvoie encore une fois aux raisons qui conduisent à fabriquer de telles procédures, c'est-à-dire aux problèmes qui en sont à l'origine.

L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, "*la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation*"⁷³, c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mises en place les théories

⁶⁸Pour la cohérence du texte, je reprends la partie correspondante de mon intervention à Braga (cf. Rudolf Bkouche, "Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", o.c.)

⁶⁹Ferdinand Gonsseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, Lausanne 1975, préface.

⁷⁰Ces trois aspects de l'épistémologie seront développés dans un article à venir.

⁷¹Pour la notion d'invariant historique, nous renvoyons à la leçon inaugurale de Paul Veyne au Collège de France (Paul Veyne, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976)

⁷²On pourrait citer le calcul différentiel de Leibniz (cf. G. W. Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989) ou le rôle de l'analytique dans les travaux de Lagrange.

⁷³Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique (ou de champs de problèmes⁷⁴) dans l'étude des conditions de la construction de la science, problèmes de fondements et règles de fonctionnement s'articulant autour des problématiques dans lesquelles ils se situent. Précisons ici que l'épistémologie des problématiques ne se situe pas seulement dans le cadre d'une genèse (que ce soit celle de l'histoire collective ou celle de l'histoire individuelle) et en ce sens, si le recours aux problématiques fait largement appel à l'histoire des sciences, il ne se réduit pas à celle-ci. La problématisation participe ainsi de la construction de la science en tant qu'elle est une science, c'est-à-dire une systématisation et une organisation de connaissances.

C'est ce point de vue de l'épistémologie des problématiques que nous proposons de développer dans la suite à partir de trois questions, la notion de limite, le rôle de la perspective dans l'étude de la géométrie dans l'espace et enfin la relation entre la géométrie élémentaire et l'algèbre linéaire. Nous verrons, en cours de route, comment une mise en perspective historique peut contribuer à éclairer ces questions, même si nous considérons qu'il y a d'autres façons de faire dans l'enseignement que la mise en perspective historique.

la notion de limite

La notion de limite relève de deux problématiques qui, si elles sont liées, présentent des aspects contradictoires.

La première problématique est d'ordre cinématique au sens où elle s'appuie sur la notion de mouvement; la formulation canonique (en terme de fonction par exemple):

$$f(x) \text{ tend vers } b \text{ lorsque } x \text{ tend vers } a$$

doit alors être entendue de la façon suivante:

Lorsque la variable indépendante x s'approche indéfiniment de la valeur a , alors la fonction (la variable dépendante) $f(x)$ s'approche indéfiniment de la valeur b .⁷⁵

L'assertion citée: " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a " est ici constituée de deux propositions, une proposition principale " $f(x)$ tend vers b " et une proposition subordonnée "lorsque x tend vers a ", indiquant ainsi que la variable x entraîne, dans son mouvement vers a , la variable $f(x)$ vers la valeur b ; autrement dit c'est la variable qui commande la fonction.

La seconde problématique est celle de l'approximation, elle peut être formulée de la façon suivante: soit une suite numérique x_n , dire que la suite x_n tend vers une limite l c'est dire que "plus n est grand, plus le nombre x_n s'approche de l ", ce qui participe encore du mouvement, mais s'y ajoute le problème suivant: jusqu'où faut-il aller dans la suite pour que la différence entre x_n et l soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance, ou, si l'on préfère, pour que l'erreur que l'on fait en remplaçant l par x_n soit plus petite qu'une valeur donnée à l'avance.

Un exemple élémentaire d'approximation est le calcul décimal approché d'un nombre: combien de chiffre après la virgule pour que le nombre calculé diffère du nombre cherché de moins d'une valeur donnée à l'avance? exemple qui à l'avantage de mettre en valeur le lien entre la notion d'approximation et le calcul lui-même. On peut citer ici la pratique de la division euclidienne lorsque "ça ne tombe pas juste".

Ici l'aspect cinématique devient second, ce qui importe n'est plus le mouvement de la variable indépendante, mouvement défini par la succession des numéros d'ordre⁷⁶, ce que l'on cherche est le numéro d'ordre permettant l'approximation voulue. Autrement dit, c'est la variable dépendante qui s'impose et la structure grammaticale de l'assertion rituelle " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a " est différente; il n'y a plus qu'une seule proposition qui indique à la fois ce qu'est la limite et le principe d'un calcul approché. On reconnaît dans cette seconde formulation la définition weierstrassienne de la limite⁷⁷.

⁷⁴pour reprendre l'heureuse expression du *Groupe d'Enseignement Mathématiques* de Louvain-la-Neuve (G.E.M.) (cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII).

⁷⁵Lorsque la différence $x - a$ devient *infinitement petite*, alors la différence $f(x) - b$ devient *infinitement petite*, formulation que l'on peut rapprocher de celle de Cauchy dans son *Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique* (1823), réédité in *Le Calcul Infinitésimal*, ACL-Editions, Paris 1987, p. 6-7.

⁷⁶il faut prendre ici le terme "suite" dans son acception usuelle et non comme désignant une application de l'ensemble des entiers dans l'ensemble des nombres.

⁷⁷Rappelons la formulation originale de Weierstrass: "*S'il est possible de déterminer une borne δ telle que, pour toute valeur de h plus petite en valeur absolue que δ , $f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ϵ , aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infinitement petite de la variable une variation infinitement petite de la fonction.*" (cours de 1861, rédigé par H.A. Schwarz, cité par Pierre Dugac in Jean

On voit ainsi apparaître une contradiction entre les deux problématiques; la première met l'accent sur le mouvement de la variable indépendante et l'effet d'entraînement sur la variable dépendante, la seconde met l'accent sur la variable dépendante et la façon dont elle force les valeurs de la première variable, contradiction qui constitue l'une des difficultés de la notion de limite, difficulté qui relève de l'ordre mathématique et c'est en cela qu'elle est une difficulté pédagogique.

Une conception utilitariste de l'enseignement (assurer la réussite, ce qui implique d'éviter ce type de difficulté aux élèves) conduirait à choisir une seule problématique et à choisir les exercices en fonction de cette problématique, ou bien à inventer l'artefact pédagogique convenable qui permettra aux élèves de réussir les exercices *ad hoc* qu'on leur proposera. Mais qu'auront-ils compris et qu'auront-ils appris?

Si l'on revient sur la notion de limite et les deux problématiques dites ci-dessus; on remarque que plusieurs éléments entrent en jeu parmi lesquels nous citerons l'aspect intuitif et l'aspect opératoire. Il faut alors préciser que l'aspect intuitif participe de chacune des deux problématiques définies ci-dessus, celle du mouvement et celle de l'approximation dans la mesure où c'est autour de cet aspect intuitif que se sont définies les deux problématiques considérées. Par contre l'aspect opératoire a conduit à mettre en avant la problématique de l'approximation dans la mesure où c'est la formulation weierstrassienne qui, pour des raisons que nous n'aborderons pas ici, s'est imposée pour donner une définition rigoureuse de la notion de limite et en déduire les conditions de calcul des limites⁷⁸.

Ignorer, dans l'enseignement, les deux problématiques constitutives de la notion de limite et les deux aspects, l'intuitif et l'opératoire, qui permettent d'appréhender cette notion, ne peut que contribuer à mutiler la notion, et par cela même à mutiler la pensée mathématique des élèves.

Exemple de cette mutilation, un article récent publié dans le *Bulletin de l'APMEP*⁷⁹; les auteurs y déclarent que l'on ne peut expliquer à un élève de lycée que la fonction $\sin x$ n'a pas de limite lorsque x tend vers l'infini. Que signifie une telle déclaration si ce n'est la disparition du concept de limite de l'enseignement du lycée; la limite se réduit à un certain mode de calcul dans des cas très particuliers sans que l'élève soit conscient de la signification du calcul qu'il fait. Comme s'il fallait éviter à tout prix que l'élève fasse appel à son intuition (il pourrait se tromper!), comme s'il ne pouvait à ce stade (le formalisme des (ϵ, η) n'est pas encore introduit) que suivre aveuglément les procédures qu'on lui impose; serait-il inconvenant qu'un élève fasse ce que tout mathématicien pratiquant fait, savoir, s'appuyer sur son intuition et remarquer qu'une fonction périodique, oscillant constamment lorsque les valeurs de la variable augmentent, ne peut avoir de limite. Par contre, marque de conscience professionnelle de la part des auteurs de l'article, ils tiennent à montrer à leurs élèves ce qu'est une démonstration et utilisent les intervalles emboîtés pour montrer, rigoureusement, que la fonction x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1. Que voilà de la belle mathématique! il est difficile d'expliquer une propriété évidente mais on sait démontrer d'une façon sophistiquée une autre propriété évidente en utilisant une méthode dont les élèves ne peuvent comprendre, à ce stade, la véritable signification.

On peut alors poser la question de la part de l'intuition et de la rigueur dans l'enseignement; faut-il laisser une grande part à l'intuition, quitte à faire peu de démonstrations, ou faut-il exiger des démonstrations en forme, quitte à laisser de côté la compréhension par les élèves des mathématiques auxquelles ils sont confrontés? Disons que lorsque la question est posée de cette façon, tout est déjà biaisé et les mathématiques disparaissent derrière une pédagogie vide. C'est que, sous cette forme, la question des limites a été déproblématisée. On ne sait plus de quoi il s'agit, on sait seulement qu'il y a un certain règlement à appliquer et que ce que l'on cherche n'a d'autre définition que l'application correcte du règlement, d'où la recherche d'un règlement facile à appliquer.

On voit ainsi la fonction de la problématisation, d'une part expliciter, autant que faire se peut, les raisons qui conduisent à étudier une notion et d'autre part mettre en valeur les aspects opératoires qui permettront de résoudre les problèmes relevant de cette notion. Notons que cette explicitation des raisons ne se réduit pas à la recherche d'une genèse de la notion (que ce soit celle de l'histoire ou celle de l'apprentissage), c'est l'activité mathématique elle-même qui est en question, la façon de penser la limite, de la calculer quand cela est possible ou d'inventer de nouvelles méthodes de détermination quand cela est nécessaire. On pourrait parler par exemple de l'un des premiers problèmes où l'on rencontre la notion de limite, la division qui ne tombe pas juste, et l'on pourrait citer de nombreux exemples où la notion de limite intervient, que ce soit pour comprendre un phénomène ou que ce soit pour calculer la valeur d'une quantité (nombre ou grandeur), usant de l'une ou de l'autre problématique explicitée ci-dessus ou même des deux ensemble.

Dieudonné (ed.) *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)* (2 volumes), Hermann, Paris 1978, volume 1, chapitre VI).

⁷⁸Il faut alors noter que cette réduction de l'aspect opératoire à la problématique de l'approximation *via* la définition de Weierstrass relève moins d'une nécessité logique que d'un choix historique en réponse aux difficultés posées par la notion d'infiniment petit encore utilisée par Cauchy. On pourrait imaginer d'autres constructions et l'on peut renvoyer à l'analyse non standard mais ce n'est pas ici le lieu d'un tel développement.

⁷⁹Jean Cordier et Christiane Jeanjean, "Limites en 1ère et en Terminale", *Bulletin de l'APMEP* n°405, juin-juillet 1996

Se pose alors la question de la mise en perspective historique. En fait ici elle se réduit à peu; point n'est besoin de faire appel à l'histoire pour exposer les deux problématiques constitutives de la notion de limite et pour en distinguer les aspects intuitifs et les aspects opératoires. Il reste qu'un regard historique permet de comprendre comment chacune des problématiques conduit à la notion de limite et comment s'est joué, dans le développement de l'analyse mathématique, le lien entre les deux problématiques conduisant à mettre en avant la problématique de l'approximation; on peut par exemple comparer les diverses définitions de la notion de limite au cours des âges⁸⁰.

la géométrie dans l'espace et la question de la représentation

Lorsque nous parlons du rôle que joue la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, nous faisons moins référence à l'aspect historique qu'aux problèmes que pose un tel mode de représentation, problèmes essentiellement géométriques qui conduisent à mettre en place à la fois certaines constructions géométriques et les raisonnements légitimant ces constructions.

Le problème de la représentation est exemplaire en ce sens que la théorisation, ici la géométrisation, se construit aux limites d'une pratique, pratique du peintre ou pratique architecturale si l'on se place du point de vue de l'histoire, mais simplement pratique du dessin si l'on se place du point de vue de la classe⁸¹. La théorisation se situe ici à deux niveaux, le premier répond à la question du "comment faire" lorsque l'on ne sait pas ou ne sait plus faire, le second répond à la question de la légitimation des réponses à la première question.

On peut alors considérer cet usage de la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace de deux façons. Ou bien l'on considère que la question de la représentation est une simple motivation pour "vendre" la géométrie dans l'espace et dans ce cas la problématisation est une donnée extérieure, une belle histoire qui peut convaincre quelques élèves et laisser les autres sceptiques⁸²; ou bien l'on considère que la problématique de la représentation participe de la géométrie elle-même et dans ce cas la pratique perspectiviste participe pleinement de l'enseignement de la géométrie.

Il faut rappeler ici l'une des difficultés de l'enseignement de la géométrie dans l'espace; d'une part la nécessité d'user de représentations planes pour étudier les situations spatiales, d'autre part la nécessité de règles de représentation s'appuyant sur la géométrie dans l'espace. Le recours à l'histoire et en particulier à celle du développement de la représentation perspectiviste permet d'aborder la difficulté en montrant comment une pratique de dessin a conduit d'une part à construire les concepts théoriques qui la légitiment et d'autre part comment la construction de tels concepts a conduit la théorie à s'émanciper de ses origines avec le développement de la géométrie projective⁸³. En ce sens, on peut concevoir que l'enseignement de la géométrie dans l'espace prenne en compte assez tôt le point de vue projectif⁸⁴.

On voit ainsi l'apport d'une mise en perspective historique, d'abord la mise en évidence du rôle joué par une pratique (ici le dessin) dans le développement d'une théorie mathématique, ensuite la façon dont cette théorie d'une part légitime des règles pratiques et d'autre part s'émancipe de cette pratique pour constituer un nouveau domaine de la science. C'est alors une façon de rompre avec la dichotomie "mathématiques pures/mathématiques appliquées" et de mieux comprendre comment les mathématiques dites *pures* interviennent dans la connaissance du monde.

la linéarisation de la géométrie élémentaire

La question des rapports entre algèbre linéaire et géométrie élémentaire est difficile et si l'on sait aujourd'hui que l'exposé de la géométrie élémentaire peut se réduire à un chapitre de l'algèbre linéaire⁸⁵, il ne semble pas facile d'accéder à ce "on". Nous donnerons comme exemple certaines réactions de refus des étudiants qui préparent les concours d'enseignement lorsqu'on leur demande de comparer ces deux sommes de la

⁸⁰Rudolf Bkouche, "Des limites et de la continuité dans l'enseignement", *Repères-IREM* n°24, juillet 1996

⁸¹Bernard Cazier, Françoise Chamontin, *La perspective centrale au collège et ... peut-être au lycée*, IREM de Lille, 1999

⁸²ainsi, lors d'une exposition sur les mathématiques, des élèves protestaient contre une partie consacrée à la peinture en proclamant: "*la peinture c'est beau, les mathématiques c'est pas beau*".

⁸³Jean-Pierre Le Goff, "La perspective en première scientifique: une certaine suite dans les idées", *Repères-IREM* n°7, avril 1992 ; Didier Bessot et Jean-Pierre Le Goff, "Mais où est donc passée la troisième dimension?" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses, Paris 1993

⁸⁴Nous renvoyons par exemple au traité de Luigi Cremona, *Eléments de Géométrie Projective*, première partie, traduit, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, Gauthier-Villars, Paris 1875 ou aux chapitres consacrés à des notions projectives dans des ouvrages classiques des classes de "Mathématiques Élémentaires".

⁸⁵sur le plan structural s'entend, si l'on sait que le discours "algèbre linéaire" n'épuise pas la géométrie.

géométrie de notre siècle que sont les *Leçons de Géométrie Élémentaire* de Hadamard⁸⁶ et la *Géométrie* de Berger⁸⁷; en quoi sont-ils différents et en quoi sont-ils semblables?

La linéarisation de la géométrie élémentaire s'est construite à partir de deux types de problèmes, le premier est lié au rôle joué par les équations linéaires dans le développement des méthodes analytiques mettant en valeur le rôle du calcul linéaire⁸⁸ en géométrie, le second est lié au calcul vectoriel, deux types de problèmes qui se sont développés de façon indépendante. Il faudrait aussi noter le rôle joué par la géométrie projective dans le développement du calcul linéaire, avec la définition "numérique" des espaces projectifs et la représentation analytique des transformations projectives comme transformations linéaires sur les coordonnées homogènes⁸⁹; nous pouvons citer par exemple l'article de Fano-Cartan dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*⁹⁰ où le calcul linéaire est présent tout au long de l'article alors que la notion de vecteur en est absente⁹¹. Quant au calcul vectoriel, il se situe dans une autre problématique dans la mesure où il se propose comme un calcul *libre de coordonnées* même si certains ouvrages, pour le justifier, le présentent comme une écriture condensée des calculs portant sur les coordonnées⁹².

Cet indépendance des deux formes d'intervention du linéaire en géométrie peut paraître surprenante pour qui connaît le lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie élémentaire. Il est clair que l'on ne peut reconstituer l'histoire et il faut considérer cette indépendance comme un fait historique. Mais qu'en est-il dans l'enseignement? on peut penser que la linéarisation de la géométrie faisant aujourd'hui partie de la vulgate mathématique, il semble inutile de revenir à des distinctions anciennes et l'on peut se borner à la présentation "algèbre linéaire" de la géométrie telle qu'elle est exposée par exemple dans l'ouvrage de Dieudonné *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*⁹³. Ce fut le point de vue de la réforme des *mathématiques modernes* et ce point de vue avait sa cohérence sur laquelle nous ne reviendrons pas⁹⁴. Mais si, du point de vue structural la géométrie élémentaire peut être considérée comme un chapitre de l'algèbre linéaire, elle ne peut s'y réduire dans la mesure où elle participe d'autres enjeux de connaissance. La définition de Legendre, "*La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue*"⁹⁵ reste toujours vraie et cette conception de la géométrie reste l'une des voies d'accès à la connaissance géométrique d'aujourd'hui.

La question se pose alors, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, d'une part de prendre en compte la géométrie élémentaire en tant que telle, et jusqu'à maintenant, à quelques changements de point de vue près (ainsi l'introduction explicite du mouvement dans la réforme de 1902⁹⁶), la géométrie élémentaire reste celle tracée par le cadre euclidien, c'est-à-dire celle de l'étude des situations spatiales, d'autre part d'amener *ceux qui sont enseignés* à prendre en compte les méthodes contemporaines fondées sur la linéarisation non seulement parce qu'elles sont modernes mais parce qu'elles ouvrent d'autres horizons, dont celui de la *géométrisation* des

⁸⁶Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire* (2 volumes), Armand Colin, Paris 1947-1949

⁸⁷Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1991

⁸⁸Je distinguerai ici le *calcul linéaire* en tant que calcul algébrique sur les polynômes du premier degré (homogènes ou non homogènes) de l'*algèbre linéaire* (au sens moderne) que l'on peut considérer comme la théorie des espaces vectoriels et qui à ce titre se dégage du calcul linéaire proprement dit.

⁸⁹Arthur Cayley, "A memoir on abstract geometry" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLX, 1870, p. 51-63; n° 413 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. VI p. 456- 469

⁹⁰Fano-Cartan, "La Théorie des Groupes Continus et la Géométrie", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, Tome III (premier volume), réédition Jacques Gabay, Paris 1991

⁹¹On peut noter que dans cet article, le groupe linéaire (au sens de l'algèbre linéaire d'aujourd'hui) est défini comme le sous-groupe du groupe affine qui laisse fixe un point donné; c'est seulement après cette définition que les auteurs montrent comment le groupe projectif peut être défini comme quotient du groupe linéaire.

⁹²Raoul Bricard, *Le Calcul Vectoriel*, Armand Colin, Paris 1929, préface. Bricard y explique que le calcul vectoriel offre une notation plus concise à la géométrie analytique, soulignant toutefois que le calcul vectoriel ne se réduit pas à une simple "tachygraphie".

⁹³Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964

⁹⁴Pour une présentation des idées qui ont conduit à la réforme des *mathématiques modernes* nous renvoyons à l'ouvrage collectif *L'Enseignement des mathématiques*, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955; pour une critique de la réforme, nous renvoyons à notre article "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes", in *Les Sciences au Lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996.

⁹⁵Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Paris 1823, p. 3

⁹⁶Rudolf Bkouche, "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert et al : *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris 1991

divers domaines de la connaissance (mathématiques, sciences physiques, ...) où intervient le linéaire n'est pas le moins important.

C'est encore une fois vers l'aspect problématique que nous nous retournerons.

Nous avons vu que le linéaire intervient en géométrie sous les deux formes du calcul linéaire et du calcul vectoriel, la question se pose alors d'expliciter les conditions de leur intervention et c'est cette explicitation qui permet d'en décider la place effective dans l'enseignement. Cette question est essentiellement d'ordre mathématique; si l'histoire des mathématiques peut apporter des éléments de réponse en renvoyant aux problématiques originelles, il faut alors prendre en compte les changements de perspective qui ont pu transformer ces problématiques et les confronter aux problématiques telles qu'elles se posent aujourd'hui.

La question de l'enseignement est alors celle de la définition de problématiques significatives, significatives par rapport à ce que l'on veut enseigner, significatives aussi pour les élèves si l'on veut que ces derniers y trouvent la force dont parlait Sanchez dans l'assertion citée au début de cet article. Ainsi la notion de problématique, parce qu'elle se situe au cœur de l'activité scientifique, se situe au cœur du triptyque défini ci-dessus: la discipline, l'enseignement, la classe.

En ce qui concerne la question ici posée des relations entre géométrie élémentaire et algèbre linéaire, l'aspect problématique doit permettre non seulement de penser la linéarisation de la géométrie élémentaire mais plus encore, car c'est l'un des apports les plus intéressants des mathématiques contemporaines, la géométrisation de tous les lieux où intervient le linéaire. On oublie trop dans l'enseignement que l'algébrisation de la géométrie a conduit à la géométrisation de l'algèbre et que cette double liaison entre géométrie et algèbre s'est développée dès la mise en place de la méthode des coordonnées comme le montrent les textes de Descartes et de Fermat.

Dans la mesure où le calcul linéaire participe des méthodes analytiques on peut considérer que son enseignement s'insère dans celui de la géométrie analytique encore qu'il nous semble nécessaire que l'accent soit mis, chaque fois que cela est possible, sur les invariants mis en évidence par ce calcul⁹⁷.

Par contre le calcul vectoriel apparaît, dès le commencement de son enseignement, comme une méthode nouvelle et par conséquent exige une intervention spécifique. Cette spécificité est d'autant plus importante que le calcul vectoriel ne participe pas de la seule géométrie; en ce sens la première rencontre avec le calcul vectoriel ne peut se réduire, pour être significative, au seul domaine géométrique si l'on veut éviter que le calcul vectoriel n'apparaisse que comme une reformulation plus ou moins compliquée de situations connues⁹⁸. Si les reformulations de situations connues et de problèmes déjà résolus jouent un rôle important dans le développement de l'activité scientifique, ces reformulations doivent être significatives sans quoi elles n'apparaissent que comme un verbiage sans intérêt aucun.

Le recours à l'histoire peut alors nous permettre de replacer l'enseignement du calcul vectoriel dans un cadre problématique prenant en compte ses divers aspects.

Dans son ouvrage sur l'histoire du calcul vectoriel⁹⁹ Crowe énonce trois grandes idées qui ont conduit au calcul vectoriel, le parallélogramme des forces, le calcul géométrique de Leibniz et la représentation géométrique des nombres complexes.

Si les deux dernières idées participent de la mise en place d'un calcul portant directement sur les objets géométriques (c'est ainsi que l'on peut comprendre la représentation géométrique des nombres complexes moins comme une représentation géométrique d'objets numériques que comme un calcul portant sur les objets géométriques eux-mêmes¹⁰⁰), la première renvoie à la signification physique, plus précisément mécanique, du calcul vectoriel. Les vecteurs sont alors une façon de représenter des concepts mécaniques (les forces et les vitesses), un vecteur permettant de "mesurer" les grandeurs correspondantes de la même façon que les nombres permettent de mesurer les grandeurs scalaires (les longueurs, les temps...).

On distingue ainsi les grandeurs scalaires, une telle grandeur étant déterminée, une fois choisie l'unité de mesure, par le nombre qui la mesure et les grandeurs orientées qui, pour être déterminées, exigent des

⁹⁷Nous renvoyons à l'article déjà cité de Fano-Cartan. On peut noter encore une fois l'importance du point de vue projectif dans le développement du calcul linéaire, mais nous n'aborderons pas ici la question déjà signalée de la place du projectif dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.

⁹⁸Ainsi en est-il du théorème de Thalès, lequel, après avoir été enseigné au collège dans le cadre de la géométrie élémentaire, devient, au début du lycée, un énoncé vectoriel (parce que, en grandissant, il faut bien changer de langage!) sans que les raisons de l'introduction des vecteurs apparaissent autrement que parce que c'est le langage des grands. Il est clair que dans ces conditions les élèves ne peuvent qu'apprendre le règlement, voire réussir les exercices de mathématiques, mais qu'ont-ils appris? question impertinente à ne pas poser.

⁹⁹Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis* (1967), Dover Publ. New York 1985

¹⁰⁰C'est la recherche d'un tel calcul pour l'espace, une fois le calcul sur les nombres complexes considéré comme un calcul géométrique dans le plan, qui a conduit Hamilton à inventer les quaternions, le calcul des quaternions jouant pour l'espace un rôle analogue au calcul complexe pour le plan.

informations supplémentaires¹⁰¹. On voit ainsi se dessiner une problématique des grandeurs orientées qui s'inscrit autant dans la géométrie que dans la mécanique et qui se propose la mise en place d'un calcul sur ces grandeurs, ce qui constitue le calcul vectoriel.

On voit ainsi la multiplicité des problématiques qui ont conduit non seulement à penser le concept de vecteur, mais à en ordonner le calcul; la question se pose alors de la rencontre de ces problématiques conduisant à la mise en place de ce chapitre spécifique que constitue le calcul vectoriel. Ce n'est pas ici le lieu d'une histoire de cette rencontre, nous nous contenterons de citer le *Traité de Mécanique Rationnelle*¹⁰² d'Appell dans lequel l'auteur explique comment les calculs sur les vitesses et les calculs sur les forces relèvent d'un même calcul, ce qui à la fois justifie l'introduction d'un chapitre préliminaire de calcul vectoriel et guide ce calcul puisque celui-ci se construit, indépendamment de sa genèse historique, *via* les questions de mécanique auxquelles il va répondre; on pourrait de même citer les divers chapitres préliminaires de calcul vectoriel dans les traités de mécanique et de physique (ainsi les volumes de Mécanique et d'Electricité du *Cours de Physique Générale* de Georges Bruhat¹⁰³). On rencontre dans ces ouvrages moins l'usage d'un calcul vectoriel que l'on appliquerait en mécanique et en physique que la définition d'un calcul sur les objets que l'on étudie en mécanique ou en physique et l'explicitation d'analogies qui permettent d'unifier les divers modes de calcul en un seul. L'activité mathématique (celle du mathématicien pratiquant comme celle de l'apprenti) se construit ainsi à l'intérieur de la problématique elle-même et celle-ci ne saurait se réduire à la simple motivation pour mettre en place une théorie mathématique.

On peut alors noter la différence entre le calcul vectoriel qui s'inscrit dans un calcul portant sur des objets géométriques ou mécanique spécifiques¹⁰⁴ et l'algèbre linéaire, laquelle participe d'un calcul sur les signes, indépendamment de toute signification de ces signes¹⁰⁵. En ce sens le calcul vectoriel ne se réduit pas à l'algèbre linéaire même si, sur le plan formel, il peut n'apparaître que comme une partie d'icelle. On peut noter que le terme *espace vectoriel* né de la rencontre du calcul vectoriel et du calcul linéaire est moins la réduction du calcul vectoriel à l'algèbre linéaire qu'une heureuse métaphore ouvrant vers de nouvelles manières de penser les situations linéaires, d'autant plus heureuse qu'elle a permis un regard géométrique sur d'autres lieux tels par exemple l'analyse mathématique¹⁰⁶.

Il nous reste à dire comment le calcul linéaire et le calcul vectoriel se sont rencontrés; nous nous contenterons, dans le cadre de cet article, de citer deux ouvrages, *Calcolo Geometrico* de Giuseppe Peano¹⁰⁷ et *Space, Time, Matter* de Hermann Weyl¹⁰⁸, dans lequel on peut lire d'une part une définition générale des espaces vectoriels et d'autre part comment la géométrie se construit dans ce contexte.

Reste, pour terminer ce paragraphe sur la problématisation, à revenir sur quelques points d'enseignement.

Si l'algèbre linéaire est le lieu d'une unification des connaissances, et c'est cela qui lui donne sa valeur universelle et en fait un chapitre essentiel des mathématiques contemporaines, on peut choisir de placer son enseignement au commencement; ce fut la conception de la réforme des *mathématiques modernes* qui supposait que, une fois les grandes structures mathématiques connues par les élèves, le reste viendrait sans difficulté.

On peut considérer au contraire qu'une structure unifiante ne peut être enseignée qu'à partir de ce qu'elle unifie. On peut alors considérer deux points de vue.

Le premier point de vue met en avant la structure unificatrice; c'est elle qui constitue l'objectif de l'enseignement, les domaines qui participent de cette unification n'étant plus que les préliminaires à l'apprentissage de l'algèbre linéaire. En particulier la géométrie élémentaire n'est plus qu'un passage obligé qui deviendra obsolète le jour où l'élève aura enfin compris moins la reformulation linéaire de la géométrie que le fait que cette première géométrie n'était qu'une étape.

¹⁰¹Raoul Bricard, *Le Calcul Vectoriel*, o.c. préface

¹⁰²Paul Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle* (1893), Réédition Jacques Gabay, Paris 1995. Il peut être intéressant de voir l'évolution de ce chapitre préliminaire depuis la première édition de 1893 jusqu'à la dernière édition de 1942 éditée par Valiron.

¹⁰³Georges Bruhat, *Cours de Physique Générale* (4 volumes), Masson, Paris

¹⁰⁴c'est en cela qu'on peut relier le calcul vectoriel au calcul géométrique à la *Leibniz* (cf. Leibniz, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection "Mathesis", Vrin Paris 1995)

¹⁰⁵La signification des signes est définie par les relations primitives explicites (axiomes).

¹⁰⁶Il nous faut rappeler ici le rôle qu'a joué l'analyse dans la genèse de l'algèbre linéaire; cf. Jean Dieudonné, *History of functional analysis*, North-Holland Publications, Amsterdam 1981 et Jean-Luc Dorier, "Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels" in Jean-Luc Dorier et al., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble 1996.

¹⁰⁷Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico* (secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann), Fratelli Bocca Editori, Torino 1888

¹⁰⁸Hermann Weyl, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover 1952

C'est une telle conception qui conduit à écrire:

*"Une difficulté rencontrée dans l'enseignement de concepts unificateurs et généralisateurs est le rôle des connaissances et des compétences préliminaires moins formalisées. En effet celles-ci doivent être réintégrées dans un processus d'abstraction, ce qui signifie qu'elles doivent être reconsidérées, pour mettre en évidence leurs caractéristiques communes, qui devraient être généralisées et unifiées, mais aussi pour laisser tomber des particularités intrinsèques qui deviendront obsolètes ou inadéquates dans la nouvelle approche."*¹⁰⁹

Une telle conception nous semble doublement réductrice.

D'une part, elle oublie la signification scientifique de toute unification. L'algèbre linéaire ne rend pas obsolètes les domaines qu'elle unifie¹¹⁰ en les replaçant dans un cadre général, bien au contraire. Non seulement elle approfondit la connaissance de ces domaines en en renouvellent les méthodes comme le montrent par exemple, en ce qui concerne la géométrie, l'article cité de Fano-Cartan ou plus récemment l'ouvrage d'Emil Artin qu'il faut savoir lire comme un prolongement de la géométrie élémentaire¹¹¹, mais encore, en mettant en valeur les structures formelles communes entre les divers domaines qu'elle unifie, elle permet ce que Dieudonné a appelé des *transferts d'intuition*¹¹², lesquels conduisent de la linéarisation de la géométrie élémentaire à la géométrisation de tous les lieux où intervient le linéaire (cf. ci-dessus).

D'autre part, et c'est là que se situe la difficulté signalée par les auteurs du texte cité, l'abstraction, même si elle est présentée comme un processus, est coupée de toute signification et la décontextualisation chère aux didacticiens n'est plus qu'une vaste déproblématisation. Comme si la seule question de l'enseignement scientifique était d'enseigner le dernier discours de la science sans se poser la question des raisons de ce dernier discours, sans se poser la question des chemins qui permettent d'accéder à la compréhension de ce dernier discours¹¹³.

Le second point de vue se propose de replacer l'algèbre linéaire dans sa perspective épistémologique (qu'il faut distinguer de la perspective historique); pourquoi l'algèbre linéaire? qu'apporte-t-elle à la géométrie élémentaire, à la fois sur le plan des méthodes et sur le plan de la compréhension? que signifie l'unification de plusieurs domaines de la connaissance? Si un point de vue historique permet d'aborder ces questions, il est clair qu'avant de ressortir d'un point de vue historique, elles participent de l'activité du mathématicien et c'est de ce point de vue qu'il faut l'aborder dans l'enseignement des mathématiques.

Dans ce cadre, la géométrie élémentaire reste l'objectif prioritaire dans l'enseignement de la géométrie et c'est parce qu'elle est prioritaire que l'on peut aller plus loin, c'est-à-dire aborder les trois aspects de la géométrie que sont la géométrie comme science autonome, autrement dit la science des *situations spatiales*, ensuite la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance, enfin la géométrie comme langage et comme représentation, ce que l'on peut appeler *l'aspect métaphorique* de la géométrie, lequel constitue le fondement de la géométrisation¹¹⁴.

Dans ce cadre, c'est moins la relation formelle entre géométrie élémentaire et algèbre linéaire qui importe que la façon dont le *linéaire* intervient dans la géométrie. Le linéaire apparaît, comme nous l'avons dit ci-dessus, *via* les méthodes analytiques et les méthodes vectorielles, méthodes qui, si elles sont étroitement liées, restent distinctes, non seulement par les conditions d'apparition dans l'histoire mais parce qu'elles mettent en jeu des modes d'appréhension différents de la géométrie: une réduction au calcul numérique puis littéral d'une part, la mise en place d'un calcul géométrique portant directement sur certains objets géométriques d'autre part. La rencontre des divers ingrédients qui constituent la géométrie doit ainsi apparaître, non comme une simple répétition de l'histoire (ce qui, comme le dit l'adage, ne serait qu'une farce), mais comme une rencontre problématisée; dans le cas contraire la multiplicité des méthodes risque de n'apparaître que comme une complication de la réglementation.

¹⁰⁹Jean-Luc Dorier et al., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, o.c., p. 191

¹¹⁰comme si l'on disait que l'optique est devenue obsolète depuis que l'on sait que les rayons lumineux sont des ondes électromagnétiques et que l'enseignement de l'optique géométrique a pour seul objectif d'amener les élèves aux équations de Maxwell.

¹¹¹Emil Artin, *Algèbre géométrique*, traduit par Michel Lazard, avant-propos de Gaston Julia, "Cahiers scientifiques", Gauthier-Villars, Paris 1962

¹¹²Jean Dieudonné, "The universal domination of the geometry", *International Congress of Mathematical Education*, Berkeley 1980

¹¹³On comprend dans ces conditions le rôle assignés aux théories de l'apprentissage, celui de permettre la construction d'une ingénierie didactique "efficace", quitte à fabriquer cet *ersatz* de connaissance que constitue le fameux "*savoir enseigné*" de la transposition didactique.

¹¹⁴Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie", *Repères-IREM* n°26, janvier 1997

On voit ainsi la nécessité de mettre en valeur l'usage de méthodes linéaires dans l'enseignement de la géométrie, que ce soit *via* la géométrie analytique des droites et des plans, en particulier les problèmes d'intersection, et la recherche de courbes algébriques satisfaisant des conditions linéaires ou que ce soit *via* le calcul vectoriel, lequel permet de mettre en place, en dimension 2 et 3 et dans un cadre géométrique, divers concepts de l'algèbre linéaire; tout en sachant que cet usage du linéaire n'implique en rien un enseignement préalable d'algèbre linéaire¹¹⁵; bien au contraire, c'est cet usage du linéaire en géométrie, confronté avec d'autres usages du linéaire dans d'autres domaines, qui permettra de comprendre la signification de l'unification proposée par l'algèbre linéaire, qui permettra aussi (et c'est, me semble-t-il, le point le plus important) les liens que l'on peut tisser entre les divers domaines où intervient le linéaire. Evidemment, la mise en place d'un tel enseignement ne va pas de soi et elle exige une réflexion mathématique constante, autant, voire peut-être plus, de la part de *celui qui enseigne* que de *ceux qui sont enseignés*; mais c'est que le rapport au savoir du maître (et il est bon de rappeler que *celui qui enseigne* doit savoir être un maître¹¹⁶) reste essentiel dans l'acte d'enseignement.

de la problématisation à la hiérarchisation des connaissances

La prise en compte de l'aspect problématique, tel que nous l'avons rencontré ci-dessus, conduit à construire une hiérarchie des connaissances, et par conséquent une hiérarchie de ces connaissances dans l'enseignement. La hiérarchisation des connaissances n'est pas une construction intangible, elle dépend, comme tout mode de classification des connaissances, d'une part des conditions dans lesquelles s'élaborent celles-ci, d'autre part du niveau de connaissances de celui qui use de cette hiérarchisation. Cette hiérarchisation est donc à la fois nécessaire et instable et l'un des rôles de l'enseignant (du maître faudrait-il dire) est de définir les hiérarchisations en fonction du niveau d'études. A défaut d'une réflexion sur cette hiérarchisation, on peut être tenté soit par l'illusion langagière de la réforme des *mathématiques modernes*¹¹⁷, soit par une pédagogie formelle telle que celle proposée dans l'ouvrage cité sur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Le rôle d'une perspective historique dans l'enseignement peut alors apporter des éléments de réflexion qui permettent d'établir une hiérarchisation des connaissances au sens que nous avons dit ci-dessus; il ne s'agit pas de la seule hiérarchisation liée à l'apprentissage, il s'agit d'une hiérarchisation bien plus profonde qui se situe à l'intérieur du savoir lui-même, dans les liens entre les divers domaines qui le constituent et dans le rapport difficile entre les divers niveaux de hiérarchisation.

Pour préciser cette notion de hiérarchie, nous reviendrons sur la double hiérarchisation définie par la relation entre la géométrie élémentaire et l'algèbre linéaire. Dans un premier temps, la géométrie élémentaire intervient comme connaissance première et c'est en s'appuyant sur elle que l'on peut montrer comment se construit une intervention du linéaire; dans un second temps, le linéaire ayant été mis en place sous la forme moderne de l'algèbre linéaire, on reconstruit la géométrie élémentaire comme chapitre de l'algèbre linéaire. Cette reconstruction n'est pas une simple reformulation, ce qui serait de peu d'intérêt, elle constitue à la fois un approfondissement et un élargissement de la géométrie et conduit à penser la géométrisation dont nous avons déjà parlé.

Notons que la double hiérarchisation dite ci-dessus ne relève pas seulement d'un ordre historique (la géométrie élémentaire précédant l'algèbre linéaire dans le temps jusqu'à ce que cette dernière remette la première à sa "vraie" place) ou d'un ordre génétique (l'apprentissage de la géométrie élémentaire considérée comme une étape vers la connaissance de l'algèbre linéaire); elle marque une prise en compte des enjeux de la connaissance, autant ceux de la géométrie élémentaire (l'étude des situations spatiales) que ceux de l'algèbre linéaire (la structuration d'un ensemble de connaissances), autant ceux de la reformulation de la géométrie en termes d'algèbre linéaire que ceux de la géométrisation des domaines de la connaissances où intervient le linéaire. En ce sens si une mise en perspective historique permet l'établissement de la double hiérarchisation définie ci-dessus, cette mise en perspective historique ne relève pas de la seule histoire; elle est aussi un élément de compréhension de l'état présent de la connaissance et c'est à ce titre qu'elle participe de l'enseignement.

On peut alors considérer que la prise en compte d'une perspective historique dans l'enseignement participe de l'hygiène scolaire (nous parlons ici de l'enseignement, pas de la classe) en amenant *ceux qui enseignent* à une réflexion sur les enjeux et les significations de leur enseignement; le danger est alors que, de ce

¹¹⁵Ces points seront précisés dans notre article "De la géométrie élémentaire au calcul linéaire et au calcul vectoriel", à paraître in *Actes de la Troisième Université d'Été Européenne "Histoire et Epistémologie dans l'Éducation Mathématique"*, Louvain-la-Neuve/Leuven, juillet 1999. Nous renvoyons aussi à l'article de Frédéric Pham, "Vivent les déterminants", *Repères-IREM*, n°26, janvier 1997.

¹¹⁶Il faut ici distinguer, dans la langue française, les deux significations du mot maître, le "*magister*" et le "*dominus*"; il est clair qu'il s'agit ici du "*magister*". Nous devons cette remarque à Catherine Kintzler. Cette distinction est développée dans l'ouvrage de Henri Pensa-Ruiz, *L'École, "Dominos"*, Flammarion, Paris 1999, p. 28

¹¹⁷Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", o.c.

recours à la perspective historique, on fabrique des "méthodes d'enseignement" donnant l'illusion d'un prêt-à-enseigner qui ne peut être que néfaste, autant pour *ceux qui sont enseignés* que pour *ceux qui enseignent*.

une conception réductrice de la problématisation

Notons que la notion de problématique peut être comprise dans un sens plus étroit, celui d'une simple motivation; son rôle est alors, pour reprendre une expression aujourd'hui à la mode dans l'enseignement français, de *donner du sens* à ce que l'on enseigne. A défaut d'explicitier le sens de ce que l'on enseigne, on se contente de *donner du sens*, la problématisation devient un artefact didactique destiné à convaincre l'élève de l'intérêt de ce qu'on lui enseigne, une forme d'*agit-prop* si l'on veut, autrement dit une forme de propagande. Il est vrai qu'une conception didacticienne isolant l'acte de l'élève, ou plutôt le réduisant au seul phénomène d'apprentissage, peut enlever toute épaisseur à la problématisation.

Le danger réside ainsi dans une vision purement instrumentale de la problématisation: "la problématisation, ça sert à", ce qui revient à dire qu'elle ne sert à rien d'autre qu'à rassurer le professeur: "ai-je bien dit ce qu'il fallait dire?", ce qui le met dans la même posture que l'élève qui se pose la question "qu'est-ce que je dois dire?". La connaissance disparaît derrière la sécurité. Notons que l'usage de l'histoire des mathématiques peut conforter cette *problématisation-alibi* lorsque cette histoire est elle-même présentée sous la seule forme d'une *donation de sens*.

3- lecture historique et lecture mathématique

Il y a plusieurs façons de lire un texte mathématique ancien; nous distinguerons ici la *lecture historique* proprement dite et la *lecture mathématique*.

La lecture historique demande de replacer le texte à la fois dans son contexte scientifique et dans son contexte historique et d'explicitier, autant que faire se peut, le lien entre ces deux contextes, c'est-à-dire la façon dont le contexte scientifique se définit dans l'histoire et la façon dont le contexte scientifique modèle l'histoire. Cette lecture est essentiellement le travail de l'historien des mathématiques. Nous verrons comment ce travail d'historien intervient dans la mise en place d'une perspective historique, moins en tant que travail d'historien que travail accompagnant une réflexion mathématique propre.

La lecture mathématique ne met en jeu que le seul contexte mathématique; elle engage le lecteur dans son activité mathématique propre indépendamment de tout recours aux conditions dans lesquels le texte a été écrit. En ce sens elle peut être anachronique, son objet étant moins de comprendre la signification d'un texte dans son époque que de prendre en charge une question mathématique à l'aune d'aujourd'hui.

Nous citerons l'étude des diverses démonstrations du théorème de Pythagore¹¹⁸; la question est alors moins celle d'une démonstration originelle (que l'on ne connaît pas) que celle des diverses formes de cette démonstration, étude qui conduit à distinguer les deux lectures possibles de l'énoncé canonique:

Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

la géométrie et la numérique, double lecture qui correspond à deux modes distincts de démonstration, un mode géométrique et un mode numérique.

La lecture géométrique nous dit que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale aux aires réunies des carrés construits sur les côtés; c'est une proposition qui porte sur des aires, c'est-à-dire des grandeurs géométriques, sans aucune intervention du numérique. C'est ainsi par exemple que l'énonce et la démontre Euclide dans le livre I des *Eléments* (proposition 47)¹¹⁹.

La lecture numérique suppose que les grandeurs, longueurs des côtés et aires des carrés, ont été mesurées et la proposition porte sur les mesures de ces grandeurs, c'est-à-dire sur des nombres. C'est la démonstration classique qui s'appuie sur la similitude et que l'on trouve dans nombres d'ouvrages classiques telles les *Leçons de Géométrie Élémentaire* de Hadamard¹²⁰.

L'histoire n'intervient ici, si elle intervient, que par le matériau qu'elle nous apporte et l'on ne saurait parler de perspective historique, même si c'est la connaissance historique qui permet, comme le montre l'ouvrage cité de Fourrey, de réunir ces démonstrations. La distinction proposée ici entre démonstrations géométriques et démonstrations numériques est d'ordre purement mathématique et c'est en ce sens qu'elle peut prendre place dans

¹¹⁸Emile Fourrey, *Curiosités Géométriques* (1907), réédition 1994 augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994

¹¹⁹Euclide, *Les Eléments*, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, Livre I à IV, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990, p. 282-284

¹²⁰Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, volume I, Géométrie plane, Armand Colin, Paris 1947, p.p. 120

l'enseignement. Le regard historique a pour but d'expliciter les raisons qui font que, dans un contexte historique donné, ce sera le point de vue géométrique ou le point de vue numérique qui sera mis en avant. Nous renvoyons ici à une lecture comparée des livres V et VI des *Eléments* d'Euclide¹²¹ et du chapitre III des *Eléments de Géométrie* de Legendre¹²²; si Euclide, pour des raisons liées à ce que l'on a appelé la *crise des irrationnelles* se propose d'édifier une théorie des rapports de grandeurs libre de toute notion numérique (les seuls nombres intervenant étant les entiers naturels, ceux du comptage), Legendre en appelle à une arithmétique préalable, le rapport de deux grandeurs étant définis par le rapport des nombres qui les mesurent comme il l'explique au début du chapitre III de son ouvrage¹²³. Cette lecture comparée et les questions qu'elle pose, d'une part une théorie euclidienne des proportions indépendante de toute pratique de mesure, voire contradictoire à une telle pratique¹²⁴, et d'autre part un renvoi à une arithmétique préalable et à la mesure des grandeurs alors que les nombres, autres que les rationnels, n'ont pas de statut théorique défini¹²⁵, nous conduit à mettre en relief quelques unes des raisons (ici celles liées à la mesure des grandeurs) qui conduisent à penser et construire le concept de nombre réel. La perspective historique a ainsi pour but d'expliciter une problématique; que celle-ci soit la problématique originelle ou non importe peu, le rôle d'une perspective historique est moins de répéter l'histoire que de mettre en relief certains problèmes en s'appuyant sur la façon dont l'histoire les a rencontrés.

Les *Eléments* d'Euclide nous offrent plusieurs exemples de cette double lecture (l'historique et la mathématique) dans la mesure où ils constituent un socle sur lequel s'appuient les constructions géométriques ultérieures, que les auteurs de ces dernières se réclament explicitement d'Euclide où que, au contraire, ils le contestent. C'est en cela que les *Eléments* gardent toute leur valeur pédagogique et que l'on peut y puiser du matériau pour l'enseignement d'aujourd'hui. La lecture mathématique que suppose un tel usage ne participe pas d'une mise en perspective historique; la place de cette dernière serait alors, à partir d'une lecture mathématique des *Eléments* et d'une étude critique de certaines démonstrations, d'expliciter les raisons qui ont conduit à sortir du cadre euclidien et à inventer les constructions géométriques sophistiquées d'aujourd'hui, éliminant ce que l'on appelle quelque peu abusivement les *lacunes* d'Euclide, abusivement au sens que ces lacunes sont moins dans la construction euclidienne que dans les limites d'icelle rencontrées par les géomètres ultérieurs confrontés à de nouveaux problèmes.

Nous mettons à part le postulat des parallèles; la place de cet énoncé parmi les postulats apparaît comme une position provisoire pour un énoncé nécessairement vrai bien que indémontré ("*le scandale de la géométrie*" selon D'Alembert¹²⁶) et il faudra la découverte (l'invention!) des géométries non-euclidiennes pour que l'on prenne conscience que cet *indémontré* est un *indémontrable*. Un regard historique sur la question des parallèles peut alors être une façon de comprendre d'une part les raisons qui ont conduit les géomètres à rechercher une démonstration du "postulat" des parallèles, d'autre part les raisons qui ont conduit à penser le "non-euclidien". Pourquoi la démonstration euclidienne sur la somme des angles d'un triangle n'est-elle pas suffisante pour assurer cette "vérité"? demandait une étudiante après la lecture d'un article d'Evelyne Barbin sur les démonstrations du théorème de la somme des angles d'un triangle¹²⁷.

On pourrait multiplier les exemples de cette double lecture, ce que nous ne ferons pas ici. Nous voulons seulement mettre l'accent sur le fait que l'intervention de l'histoire ne relève pas seulement de la perspective historique, qu'un texte ancien peut se prêter à plusieurs modes de lecture et que cette lecture dépend de l'objectif que l'on se propose.

En ce qui concerne l'enseignement, la question de la lecture des textes anciens se complique dans la mesure où il nous faut considérer d'une part les textes que le maître va utiliser dans la construction de son

¹²¹Euclide, *Les Eléments*, volume 2, Livres V à IX, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1994

¹²²Legendre, *Eléments de Géométrie*, o.c.

¹²³*ibid*, p. 61-62

¹²⁴contradictoire au sens que la pratique de la mesure s'appuie sur la division des grandeurs en parties égales (ce qui conduit à la notion de fraction) alors que la théorie des proportions d'Euclide s'appuie sur les multiples des grandeurs considérées.

¹²⁵La notion de nombre reste empirique, les divers types de nombres, les rompus et les sourds, n'ayant en commun que leur capacité à exprimer des mesures de grandeurs, capacité que l'on peut considérer comme leur *raison d'être*; c'est cette capacité qui a conduit Stevin à unifier la notion de nombre (Simon Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans *Mathématiques au Fil des Ages*, édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, Gauthier-Villars. Paris 1987, p. 134-135) et qui permet d'énoncer les propriétés générales des opérations sur ces nombres.

¹²⁶Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 318

¹²⁷Evelyne Barbin, "Trois démonstrations pour un théorème de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie", *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon, mai 1989), IREM de Besançon & IREM de Lyon, 1990

enseignement et qui n'impliquent pas directement les élèves et les textes que le maître proposera à la lecture des élèves. Dans ce dernier cas se pose encore la question du mode de lecture, purement mathématique ou prenant en compte le contexte historique, comme nous l'avons expliqué à propos des démonstrations du théorème de Pythagore citées ci-dessus.

On voit ici le double usage des textes anciens dans l'enseignement, matériau destiné au seul usage du maître dans la construction de son enseignement ou matériau à l'usage des élèves. Dans chacun de ces cas se pose la question du mode de lecture, moins les aspects historiques en tant que tels que l'apport de ces textes dans l'enseignement, lequel apport peut se réduire au seul aspect mathématique ou peut au contraire s'appuyer explicitement sur le contexte historique. C'est alors au maître de décider du mode d'emploi de ces textes, ce qui implique que le maître soit capable de prendre en charge les divers aspects d'une intervention de l'histoire dans l'enseignement; cela nous renvoie à la formation des maîtres, question que nous ne pouvons aborder dans le cadre de cet article.

4- les limites de la perspective historique

Les considérations précédentes nous conduisent à poser quelques questions sur l'usage de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Nous avons vu que cet usage ne se réduit pas à la seule perspective historique, nous avons vu aussi la nécessité de distinguer le travail du maître organisant son enseignement et le travail proposé en classe.

Cette diversité des formes de l'intervention de l'histoire en montre aussi la difficulté, voire les effets pervers. C'est alors au maître à décider de cette forme, celle-ci n'étant pas déterminée (déterminable!) *a priori*. C'est cela qui nous conduit à poser la question des limites de l'usage d'une perspective historique dans l'enseignement.

Une double question peut être posée qui nous renvoie à la double lecture expliquée ci-dessus, non seulement la question de l'apport de l'histoire d'un domaine de mathématiques pour une meilleure appréhension de ce domaine, mais aussi la question des formes sous lesquelles s'effectue cet apport.

Nous avons déjà dit que la lecture de certains textes anciens demandait une traduction préalable en termes modernes. Si du point de vue de l'histoire cette première lecture est insuffisante, voire dangereuse par les risques d'anachronisme auxquels elle peut conduire, elle permet cependant une première appréhension du texte et peut s'avérer suffisante dans le cadre d'un travail en classe. Dans ce cadre, les considérations historiques sont secondes et leur intervention a pour objectif moins d'introduire une notion ou une théorie que d'en montrer les divers aspects lorsque nécessaire ou d'amener les élèves, mais peut-être d'abord les maîtres, à prendre conscience des difficultés d'appréhension de la notion ou de la théorie considérée. La question est moins la mise en place d'une perspective historique que l'approche d'une notion à travers des textes anciens, moins pour leur caractère proprement historique que pour l'intérêt mathématique de tels textes. Nous pouvons citer ici certains textes grecs, en particulier les *Eléments* d'Euclide dont nous avons dit ailleurs la modernité¹²⁸, ainsi que certains textes de Descartes et Fermat qui permettent de comprendre l'apport de la méthode des coordonnées dans la résolution des problèmes de géométrie.

On voit encore une fois apparaître la nécessaire distinction entre le travail du maître, lequel exige une part importante de connaissance historique, et l'usage par les élèves pour lesquels l'histoire apparaît comme un éclairage particulier de ce qui est enseigné. Le travail du maître se situe alors dans l'organisation de son enseignement, la connaissance de l'histoire d'une notion ou d'une théorie, en particulier de sa genèse, et lorsque cela lui semble utile, le recours à des textes anciens, lui permettant de mieux penser son enseignement et d'en prévoir les difficultés d'appréhension. Nous pouvons citer la question des rapports entre la géométrie élémentaire et le linéaire dont nous avons parlé ci-dessus; la question est alors moins la lecture de textes historiques, que la construction d'une problématique générale qui amène les élèves à comprendre d'une part l'apport des considérations linéaires dans l'étude de la géométrie élémentaire, que ce soit sous la forme du calcul linéaire ou sous la forme du calcul vectoriel, et d'autre part l'apport de la géométrisation dans les divers domaines de la connaissance où intervient le linéaire.

On voit donc ici un usage de l'histoire qui relève moins de la mise en perspective historique que d'une forme de problématisation au sens que nous avons dit ci-dessus; cela implique alors, même si l'histoire n'apparaît pas en tant que telle pour les élèves, une connaissance historique de la part des maîtres, ce qui nous renvoie encore une fois à l'intervention de l'histoire dans la formation des maîtres.

Nous avons abordé ci-dessus la seconde partie de la double question posée au début de ce paragraphe, celle où l'on s'appuie sur l'usage de l'histoire, que ce soit sous la forme d'une mise en perspective historique ou sous la forme du seul usage mathématique de textes anciens; nous voulons aborder maintenant la première partie de la question, celle de la pertinence d'un recours à l'histoire, voire des nuisances possibles de ce recours dans l'appréhension de connaissances mathématiques.

¹²⁸Nous renvoyons à notre préface de l'ouvrage de Michel Carral, *Géométrie élémentaire*, Ellipses, Paris 1995.

L'enseignement des mathématiques a pour objet les mathématiques et c'est par rapport à cet objectif et seulement par rapport à cet objectif que l'on peut définir une intervention de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Un usage non maîtrisé de l'histoire risque alors, sinon de substituer un enseignement de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques, du moins d'*inventer* une méthode historique qui ne ferait qu'ajouter aux difficultés de l'appréhension de la discipline de nouvelles difficultés.

Nous avons parlé au début de ce texte des possibilités d'un usage "magique" de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement; la méthode historique serait ainsi une façon de répondre aux difficultés de l'enseignement. La méthode historique ne serait alors plus qu'une forme de ce que certains appellent *une ingénierie didactique*, une façon de chercher une réponse technique à des problèmes qui sont essentiellement épistémologiques au sens qu'ils engagent le sujet connaissant dans sa globalité, que ce soit *celui qui enseigne* ou *celui qui est enseigné*. Rien ne nous semble plus dangereux que de réduire les problèmes de l'enseignement à la seule mise en place de techniques convenables, celles-ci fussent-elle fondées sur l'histoire, ce serait à la fois conforter une illusion et fabriquer un nouveau dogmatisme, mais ce n'est pas le lieu de développer cette question ici et nous renvoyons à un article antérieur¹²⁹.

Présentant l'ouvrage *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*¹³⁰ qui relate plusieurs expériences d'utilisation de l'histoire des mathématiques dans des classes de lycées et de collèges, Evelyne Barbin écrivait:

"Toutefois le lecteur ne trouvera pas ici une formule toute faite ou une réponse unique..."

précisant

"Le lecteur ne doit pas considérer les expériences ici relatées comme des modèles ou des accomplissements; elles sont le fait d'enseignants, de collègues ou de lycées, en situation de recherche."

Cette situation de recherche implique une maîtrise suffisante de l'histoire des mathématiques, maîtrise qui ne peut s'acquérir que par une pratique d'icelle, et particulièrement une pratique de la lecture des textes anciens. L'histoire des mathématiques devient ainsi un point important de la formation des maîtres; qu'elle intervienne dans la formation continue comme cela est pratiqué depuis plusieurs années dans les IREM, ou qu'elle intervienne dans la formation initiale comme cela est encore à faire, elle représente un point fort de la culture des futurs professeurs, cette culture sans laquelle l'enseignement n'est que répétition, culture qui ne se réduit pas à la seule connaissance technique d'une discipline mais qui se situe dans la prise de conscience par le *sujet connaissant* des significations et des enjeux de la discipline en question.

Ceci nous renvoie encore une fois à la formation des maîtres et c'est sur cette remarque que nous terminerons cet article, renvoyant à un article ultérieur sur la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des maîtres.

Bibliographie

Jean Le Rond D'ALEMBERT, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986

Paul APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle* (1893), Réédition Jacques Gabay, Paris 1995

Emil ARTIN, *Algèbre géométrique*, traduit par Michel Lazard, avant-propos de Gaston Julia, "Cahiers scientifiques", Gauthier-Villars, Paris 1962

Evelyne BARBIN, "Trois démonstrations pour un théorème de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie", *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon, mai 1989), IREM de Besançon & IREM de Lyon, 1990

Marcel BERGER, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1991

Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF, "Mais où est donc passée la troisième dimension?" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses, Paris 1993

Georges BRUHAT, *Cours de Physique Générale* (4 volumes), Masson, Paris

Rudolf BKOUCHE, "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert et al : *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris 1991

Rudolf BKOUCHE, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *Repères-IREM* n°9 octobre 1992

¹²⁹Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie", o. c.

¹³⁰Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM, 1988

Rudolf BKOUCHE, "Des limites et de la continuité dans l'enseignement", *Repères-IREM* n°24, juillet 1996

Rudolf BKOUCHE, "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes", in *Les Sciences au Lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996.

Rudolf BKOUCHE, "Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie", *Repères-IREM* n°26, janvier 1997

Rudolf BKOUCHE, "Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997

Rudolf BKOUCHE, Bernard CHARLOT, Nicolas ROUCHE, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII

Raoul BRICARD, *Le Calcul Vectoriel*, Armand Colin, Paris 1929

Michel CARRAL, *Géométrie élémentaire*, Ellipses, Paris 1995

Arthur CAYLEY, "A memoir on abstract geometry" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLX, 1870, p. 51-63; n° 413 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. VI p. 456- 469

Bernard CAZIER, Françoise CHAMONTIN, *La perspective centrale au collège et ... peut-être au lycée*, IREM de Lille, 1999

Bernard CHARLOT, *Du Rapport au Savoir*, Anthropos, Paris 1997

Jean CORDIER et Christiane JEANJEAN, "Limites en 1ère et en Terminale", *Bulletin de l'APMEP* n°405, juin-juillet 1996

Luigi CREMONA, *Eléments de Géométrie Projective*, première partie, traduit, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, Gauthier-Villars, Paris 1875

Michael J. CROWE, *A History of Vector Analysis* (1967), Dover Publ. New York 1985

Jean DIEUDONNE, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964

Jean DIEUDONNE (ed.) *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)* (2 volumes), Hermann, Paris 1978

Jean DIEUDONNE, *History of functional analysis*, North-Holland Publications

FANO-CARTAN, "La Théorie des Groupes Continus et la Géométrie", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, Tome III (premier volume), réédition Jacques Gabay, Paris 1991

Jean-Luc DORIER et al., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble 1996

EUCLIDE, *Les Eléments*, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, Livre I à IV, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990

EUCLIDE, *Les Eléments*, volume 2, Livres V à IX, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1994

Emile FOURREY, *Curiosités Géométriques* (1907), réédition 1994 augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994

Ferdinand GONSETH, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, Lausanne 1975

Jacques HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire* (2 volumes), Armand Colin, Paris 1947-1949

Adrien-Marie LEGENDRE, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Paris 1823

Jean-Pierre Le Goff, "La perspective en première scientifique: une certaine suite dans les idées", *Repères-IREM* n°7, avril 1992

G. W. LEIBNIZ, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989

G. W. LEIBNIZ, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection "Mathesis", Vrin Paris 1995

Giuseppe PEANO, *Calcolo Geometrico* (secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann), Fratelli Bocca Editori, Torino 1888

Henri PENSA-RUIZ, *L'Ecole, "Dominos"*, Flammarion, Paris 1999

Frédéric PHAM, "Vivent les déterminants", *Repères-IREM*, n°26, janvier 1997

Francisco SANCHEZ, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

Paul VEYNE, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976

Max WEBER, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965

Hermann WEYL, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover 1952

L'Enseignement des mathématiques, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955

Mathématiques au Fil des Ages, édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, Gauthier-Villars. Paris 1987

Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM, 1988